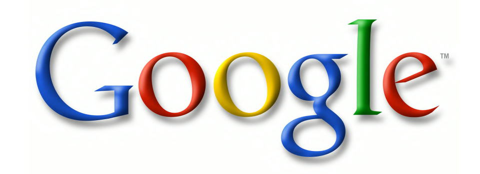






ZUR THEORIE

DER

BERÜHRUNGSTRANSFORMATIONEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOCTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

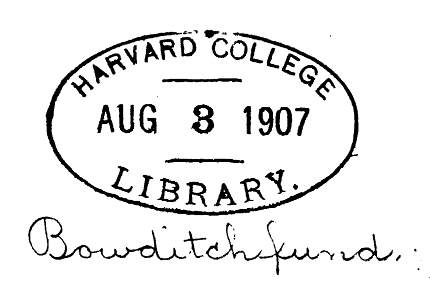
VORGELEGT VON

FRIEDRICH ENGEL,

CAND. MATH.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1883.



321

Ausser den gewöhnlichen Punkttransformationen giebt es noch andere ebenfalls eindeutig*) umkehrbare Umformungen der ebenen Curven und allgemeiner der Mannigfaltigkeiten n^{ter} Dimension im Raume von $n+1$ Dimensionen, es sind dies die sogenannten Berührungstransformationen, deren Wesen und deren Bedeutung für das Gebiet der Differentialgleichungen zuerst Sophus Lie in vollem Umfange erkannt und klargestellt hat (cf. Math. Ann. Bd. VIII, pag. 215 ff).

Diese Lie'schen Berührungstransformationen sind Umformungen zwischen Differentialquotienten erster Ordnung; A. V. Bäcklund zog zuerst auch Transformationen zwischen Differentialquotienten höherer Ordnung in Betracht und gelangte so zu unendlich vieldeutigen Transformationen (Ann. IX, 297—320; XI, 199 ff.).

Alle diese Untersuchungen lassen jedoch eins vermissen: nirgends wird die Frage nach einem innern Zusammenhang zwischen den verschiedenen Classen von Transformationen aufgeworfen. Wir wollen im Folgenden diese Frage aufnehmen und wenigstens für die Ebene vollständig erledigen, indem wir die erwähnten Transformationen sämmtlich auf die Punkttransformationen zurückführen.

§ 1.

Die Lie'schen Berührungstransformationen in der Ebene.

In den Gleichungen einer Punkttransformation zwischen den beiden Ebenen der (xy) und der $(x'y')$ denken wir uns einen Parameter λ enthalten etwa:

$$x' = X(x, y, \lambda), \quad y' = Y(x, y, \lambda);$$

ausgeschlossen seien dabei die blossen Punktconstructionen, für welche $\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} \equiv 0$ ist, auch möge λ weder in X noch in Y fehlen.

Den Parameter λ lassen wir alle möglichen Werthe durchlaufen und bekommen so ∞^1 aufeinanderfolgende Punkttransformationen, deren Gesammtheit als eine einzige Abbildung der (xy) Ebene auf

*) „eindeutig" im Gegensatze zu „unendlich vieldeutig", also nicht etwa im algebraischen Sinne.

die $(x'y')$ Ebene angesehen werden kann. Bei dieser Auffassung gehören vermöge der Gleichungen (1) zu jeder Curve C oder $y = y(x)$ der (xy) Ebene ∞^1 Curven C' der andern Ebene, doch kommen hierbei zwei verschiedene Systeme von je $\infty^1 C'$ in Betracht. Fassen wir nämlich einerseits jede der ∞^1 Punkttransformationen für sich ins Auge, so liefert uns jede eine besondere C' als Bild der Curve C, im Ganzen erhalten wir also $\infty^1 C'$, deren Gleichung $y' = y'(x', \lambda)$ sich durch Elimination von x aus (1), worin $y = y(x)$ zu setzen ist, ergiebt, wir nennen diese Curven einfach die Curven $\lambda = \text{const.}$

Betrachten wir andererseits alle ∞^1 Punkttransformationen gleichzeitig, so bekommen wir zu jedem Punkt der Curve $y = y(x)$ ∞^1 Punkte $(x'y')$ oder eine C' zugeordnet, insgesammt also wieder $\infty^1 C'$; die Gleichung $y' = y'(x', x)$ dieses zweiten Curvensystems, welches das der Curven $x = \text{const.}$ heissen möge, entsteht durch Elimination von λ aus den Gleichungen (1). Unsere ∞^1 Punkttransformationen begründen mithin zwei verschiedene Zuordnungen von je $\infty^1 C'$ zu den einzelnen Curven der (xy) Ebene; indem wir nun zu diesen $\infty^1 C'$ immer die Enveloppe suchen, kommen wir auf zwei neue Zuordnungen, welche beide jeder Curve C nur eine Curve C' entsprechen lassen. Die Entstehung dieser neuen Curventransformationen aus den ∞^1 Punkttransformationen rechtfertigt es, wenn wir sie als „Umhüllungstransformationen" der letzteren bezeichnen. Um diese Umhüllungstransformationen von (1) wirklich zu bestimmen, haben wir in (1) $y = y(x)$, die Gleichung der Curve C einzusetzen und dann die Enveloppen der Curven $\lambda = \text{const.}$ und der Curven $x = \text{const.}$ aufzusuchen, für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$ schreiben wir dabei bezüglich p und p'.

A) *Die Curven $\lambda = \text{const.}$* x ist die unabhängige Variable also:

$$(2\text{a}) \qquad p' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial Y}{\partial y}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y}}.$$

Um die Enveloppe zu erhalten, hat man λ derart als Function von x zu bestimmen, dass (1) eine Curve $x' = \overline{X}(x)$, $y' = \overline{Y}(x)$ liefert, welche in jedem ihrer Punkte eine der Curven $\lambda = \text{const.}$ berührt, d. h. welche für jeden Werth von x und den zugehörigen Werth von λ ergiebt:

$$\frac{\frac{d\overline{Y}}{dx}}{\frac{d\overline{X}}{dx}} = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}},$$ es muss daher die Gleichung:

$$(3\text{a}) \qquad \frac{\frac{d\overline{Y}}{dx}}{\frac{d\overline{X}}{dx}} = \frac{\frac{dY}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}$$

identisch erfüllt werden, ohne dass $\frac{d\lambda}{dx} \equiv 0$ ist und daraus bekommt man für λ die Gleichung:

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0. \tag{4}$$

Ergiebt (4) einen Werth von λ; welcher (3a) befriedigt, so bedarf es zur Herstellung der gesuchten Umhüllungscurve nur noch der Elimination von x aus (1), worin die betreffende Wurzel λ der Gleichung (4) einzusetzen ist.

B.) *Die Curven $x = const.$* λ ist die unabhängige Variable, daher:

$$p' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}. \tag{2b}$$

Die Enveloppe wird erhalten, wenn man für x in (1) eine solche Function von λ einsetzt, dass eine Curve $x' = \overline{X}(\lambda)$, $y' = \overline{Y}(\lambda)$ entsteht, welche die Gleichung $\frac{\frac{d\overline{Y}}{d\lambda}}{\frac{d\overline{X}}{d\lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}$ zur Identität macht, das führt auf die Bedingung:

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}} \tag{3b}$$

und so kommt man, da $\frac{dx}{d\lambda} \neq 0$ sein soll, wieder auf die Gleichung (4).

Ob man daraus x als Function von λ oder λ als Function von x bestimmt, ist gleichgültig, nur muss der gefundene Werth die Gleichung (3b) befriedigen; die Umhüllungscurve aber ist offenbar mit der schon bei A) gefundenen identisch. Die beiden Systeme von $\infty^1 C'$, welche sich bei ∞^1 Punkttransformationen zu jeder (xy) Curve ergeben, besitzen somit ein und dieselbe Enveloppe, ein Ergebniss, welches sich einfach so aussprechen lässt:

Satz I. „*Die Curven $u = const.$ und die Curven $v = const.$ der (xy) Ebene, welche durch die Gleichungen $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$ dargestellt werden, haben die Enveloppe gemein.*“

Nach dem, was wir bei A) und bei B) gefunden haben, liefern unsere ∞^1 Punkttransformationen (1) nur eine Umhüllungstransformation, welche durch die Gleichung (4) bestimmt ist.

Um (4) auf eine einfachere Form zu bringen, denken wir uns aus der Gleichung $X = X(x, y, \lambda)$ λ als Function von x, y, X dargestellt und erhalten so an Stelle von (1) die Gleichungen: $x' = X(x, y, \lambda)$, $y' = \overline{Y}(x, y, X)$; die Gleichung (4) aber geht über in:

$$\frac{dX}{dx}\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial\lambda}-\left(\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{Y}}{\partial X}\cdot\frac{dX}{dx}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial\lambda}=0$$

oder in: $\left(\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial\lambda}=0$. Die Möglichkeit $\frac{\partial X}{\partial\lambda}=0$ kann nicht in Betracht kommen, denn weder (3a) noch (3b) würde dabei befriedigt werden, dagegen bestimmt die Gleichung $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}=0$ im Allgemeinen λ als Function von p. Durch die Substitution dieses Werthes können nun $\frac{\partial X}{\partial\lambda}$ und $\frac{\partial Y}{\partial\lambda}$, die ja an und für sich p nicht enthalten, offenbar nicht $\equiv 0$ werden, ebensowenig $\frac{dX}{dx}$ und $\frac{dY}{dx}$, denn diese müssten wegen (4) gleichzeitig verschwinden, was doch ausgeschlossen ist, da $\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}$ nicht null werden kann. Somit dürfen wir setzen:

$$\frac{\partial Y}{\partial\lambda}=M.\ \frac{\partial X}{\partial\lambda},\quad \frac{dY}{dx}=M.\ \frac{dX}{dx}$$

und keine der hierbei vorkommenden Grössen verschwindet bei der Substitution des Werthes von λ. Daraus erhellt denn sofort, dass die Wurzel λ der Gleichung $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}=0$, wenn sie wirklich p enthält, auch (3a) und (3b) identisch befriedigt.

$\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}=0$ wird aber immer für λ eine Function von p ergeben, ausgenommen wenn $\dfrac{\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}}{\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}}$ frei von λ oder also frei von X ist, d. h. wenn:

$$\frac{\partial\overline{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\overline{Y}}{\partial X}-\frac{\partial\overline{Y}}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\overline{Y}}{\partial X}\equiv 0.$$

In diesem Falle hat man: $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial X}=f(\overline{Y},X)$ also $\overline{Y}=F(X,c)$, wo x und y nur in c vorkommen können. Wir sehen demnach: bei allen Transformationen (1) mit Ausnahme allein derjenigen, welche die Form haben: $x'=X(x,y,\lambda)$, $y'=\overline{Y}(X,\varphi(x,y))$ oder also auf eine Gleichung $F(x',y',\varphi(x,y))=0$ führen, bestimmt die Gleichung (4) λ als Function von x, y und p. Durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung (1) und in die Gleichung (2a) oder (2b) erhalten wir die Umhüllungstransformation von (1) in folgender Gestalt:

(5) $\qquad x'=\Xi(x,y,p),\quad y'=\mathrm{H}(x,y,p),\quad p'=\Pi(x,y,p)$

und zwar genügen Ξ, H, Π den Bedingungen:

(6) $\qquad |\Xi\Pi|=\frac{d\Xi}{dx}\cdot\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial p}-\frac{d\mathrm{H}}{dx}\cdot\frac{\partial\Xi}{\partial p}\equiv 0,\quad \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial p}-\Pi\cdot\frac{\partial\Xi}{\partial p}\equiv 0.$

Es ist nämlich $\frac{d\Xi}{dx} = \frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{\partial \Xi}{\partial p} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p}$ u. s. w., beachtet man hierzu ausser der Gleichung 4) noch, dass $\frac{dH}{dx} - \Pi \cdot \frac{d\Xi}{dx} \equiv 0$ werden muss, so kommt man auf die Gleichungen (6) sehr leicht. Wie wir sehen ist die Umhüllungstransformation von (1) eine Lie'sche Berührungstransformation und da sie sich sowol bei *A*) als bei *B*) ergeben hat, wollen wir sie als „vollständige" Umhüllungstransformation bezeichnen im Gegensatz zu den „unvollständigen", welche nur auf einem der beiden Wege erhalten werden. So können wir denn unsere Resultate zuzammenfassen wie folgt:

Satz II. „∞^1 *Punkttransformationen von der Form (1), welche keine blossen Punktconstructionen sind, haben immer eine Lie'sche Berührungstransformation zur vollständigen Umhüllungstransformation, wofern sie nicht bei der Elimination von λ auf eine Gleichung $F(x', y', \varphi(x,y)) = 0$ führen*".

Dazu, dass ∞^1 Punkttransformationen (1), welche nach x und y auflösbar sind, eine vollständige Umhüllungstransformation besitzen, reicht es offenbar hin, wenn die Gleichung (4) wirklich λ als Function von p bestimmt; nebenbei sei noch bemerkt, dass in dem gedachten Ausnahmefall, wo eine Gleichung $F(x', y', \varphi(x, y)) = 0$ auftritt, die Umhüllungstransformation, wenn überhaupt eine existirt, nur eine unvollständige und zwar eine Punkttransformation sein kann.

Stellen die Gleichungen (1) blosse Punktconstructionen dar, ist also $\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} \equiv 0$, so lassen sie sich schreiben:

$$1') \quad x' = X(x, y, \lambda), \; y' = \overline{Y}(X, \lambda).$$

Hier giebt es nur ein einziges System von Curven $\lambda = \text{const.}$, in welches alle Curven der (x, y) Ebene verwandelt werden, eine Umhüllungstransformation im Sinne von *A*) kann es daher nicht geben; anders bei *B*), denn die Gleichungen $\frac{dX}{dx} = 0$ und $\frac{d\overline{Y}}{dx} = 0$ sind ja in unserem Falle vereinbar und bestimmen, falls nicht X die Form hat: $\overline{X}(\psi(x, y), \lambda)$, immer λ als Function von p, die Bedingung (3b) wird identisch erfüllt und so ist denn eine Lie'sche Berührungstransformation unvollständige Umhüllungstransformation der Transformationen 1'). Wir können das auch so aussprechen:

Satz III. „*Ergiebt die Gleichung* $\frac{\partial X}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial X}{\partial y} = 0$ *für λ eine Function von x, y und p, so verwandeln sich durch Substitution dieses Werthes die Gleichungen:*

$$1') \quad x' = X(x, y, \lambda), \; y' = \overline{Y}(X, \lambda),$$

in denen $\overline{Y}$ eine von λ nicht freie, sonst aber willkürliche Function bedeutet, immer in eine Lie'sche Berührungstransformation."

Betrachten wir nun (5) und (6) als die allgemeinen Definitionsgleichungen der Lie'schen Berührungstransformationen in der Ebene und verlangen nur, dass die Functionen Ξ und H von einander unabhängig sind und dass sie beide p wirklich enthalten, so können wir leicht umgekehrt ∞^1 Punkttransformationen angeben, welche die Lie'sche Berührungstransformation (5) zur Umhüllungstransformation haben. Setzen wir nämlich in (5) für p eine beliebige Function φ von x, y, λ, so erhalten wir die ∞^1 Punkttransformationen:

$$(7) \qquad x' = \Xi(x, y, \varphi(x, y, \lambda)), \quad y' = \mathsf{H}(x, y, \varphi(x, y, \lambda))$$

und da Ξ und H von einander unabhängige Functionen sind, können wir auch φ immer so wählen, dass die Gleichungen (7) nach x und y auflösbar sind. Die Umhüllungstransformation zu (7) bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \varphi} - \left(\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x} + p \cdot \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} = 0,$$

denn der Factor $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ darf natürlich nicht verschwinden; diese Gleichung aber wird erfüllt durch die Substitution $\varphi = p$, welche (7) wieder in (5) verwandelt und für λ wirklich eine Function p ergiebt; aus alledem folgern wir, dass (5) vollständige Umhüllungstransformation von (7) ist.

Satz IV. *„Jede Lie'sche Berührungstransformation der ebenen Curven lässt sich auf unbegränzt viele Weisen als vollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 Punkttransformationen darstellen".*

Wir ersehen hieraus, dass die in den Gleichungen (5), (6) enthaltene Definition der Lie'schen Berührungstransformationen sich mit der unsrigen, wie sie Satz IV ausspricht, vollkommen deckt.

Die bekannte Eigenschaft der Lie'schen Berührungstransformationen (5), (6), eindeutig umkehrbar zu sein, geht nun auch aus unserer Art diese Transformationen abzuleiten leicht hervor. Die ∞^1 Punkttransformationen $x' = X(x, y, \lambda)$, $y' = \overline{Y}(x, y, X)$ mögen eine Lie'sche Berührungstransformation als vollständige Umhüllungstransformation besitzen, so dass also $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \neq 0$ ist; wir haben:

$$p' = \frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{d\overline{Y}}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$$

oder:

$$p = -\frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} - p' \cdot \frac{\partial X}{\partial x}}{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} - p' \cdot \frac{\partial X}{\partial y}},$$

ist es daher möglich x, y und λ

aus den Gleichungen:

$$x' = X, \ y' = \overline{Y}, \ p' = \frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\partial Y}{\partial X}$$

als Functionen von x', y', p' darzustellen, so ist dasselbe mit x, y, p der Fall.

Die Functionaldeterminante der genannten Gleichungen:

$$\sum \pm \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}$$

wird

$$= \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \left\{ \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} - \frac{\partial \overline{Y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right\}, \text{ sie ist } \neq 0,$$

und damit ist unsere Frage erledigt; jede vollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 Punkttransformationen ist eindeutig umkehrbar oder also:

Satz V. „*Die Lie'schen Berührungstransformationen der ebenen Curven sind nach x, y, p auflösbar, also eindeutig umkehrbar.*"

Eine Frage bleibt nunmehr noch, ob nämlich die Auflösungen der Gleichungen (1) nach x und y:

$$x = X'(x', y', \lambda), \quad y = Y'(x', y', \lambda) \tag{8}$$

als Umhüllungstransformation die Auflösungen der Gleichung (5) nach x, y, p besitzen.

Die Umhüllungstransformation von (8) erhält man, indem man λ durch den aus:

$$\frac{dX'}{dx'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial \lambda} - \frac{dY'}{dx'} \cdot \frac{\partial X'}{\partial \lambda} = 0 \tag{9}$$

folgenden Werth ersetzt; andererseits findet man die Auflösungen der Gleichungen (5), wenn man die Gleichungen:

$$x' = X(x, y, \lambda), \ y' = Y(x, y, \lambda), \ p' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} \tag{10}$$

nach x, y, λ auflöst.

Aus den Beziehungen der Gleichungen (1) und (8) zu einander ergeben sich weiter folgende Identitäten:

$$\begin{cases} x' \equiv X(X', Y', \lambda), & y' \equiv Y(X', Y', \lambda), \\ x \equiv X'(X, Y, \lambda), & y \equiv Y'(X, Y, \lambda), \end{cases} \tag{11}$$

und daraus leiten wir leicht ab:

$$\frac{\partial X}{\partial X'} \cdot \frac{\partial X'}{\partial \lambda} + \frac{\partial X}{\partial Y'} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial \lambda} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}+\frac{\partial Y}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}+\frac{\partial Y}{\partial\lambda}\equiv 0.$$

Diese Gleichungen gestatten das Resultat der Elimination von x und y aus (10) in der Form darzustellen:

$$p'=\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}+\frac{\partial Y}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}+\frac{\partial X}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}}. \tag{12}$$

Bestimmt man hieraus λ und setzt seinen Werth in (8) ein, so erhält man die Auflösungen der Gleichungen (10) oder (5), welche offenbar mit der Umhüllungstransformation von (8) übereinstimmen werden, sobald die Gleichungen (9) und (12) gleiche Werthe von λ oder, was dasselbe ist, gleiche Werthe von p' liefern. Dies ist der Fall sobald:

$$\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}+\frac{\partial Y}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}+\frac{\partial X}{\partial Y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}}+\frac{\frac{\partial X'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}}{\frac{\partial X'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}}\equiv 0$$

ist. Verbindet man hiermit die aus (11) folgenden Identitäten:

$$\frac{\partial X}{\partial Y'}\equiv-\frac{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial y'}}{\frac{\partial Y'}{\partial y'}},\quad \frac{\partial Y}{\partial Y'}\equiv-\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial x'}}{\frac{\partial Y'}{\partial x'}},$$

so folgt, dass:

$$\frac{\frac{\partial X'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}}{\frac{\partial X'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial\lambda}-\frac{\partial Y'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial X'}{\partial\lambda}}\cdot\left\{1+\frac{\frac{\partial Y}{\partial X'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial y'}}{\frac{\partial X}{\partial X'}\cdot\frac{\partial Y'}{\partial x'}}\right\}\equiv 0$$

sein muss. Das ist auch wirklich der Fall, denn es ist:

$$\frac{\partial Y'}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y'}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}\equiv 0$$

und macht man hierin die Substitution (8), so zeigt sich, dass wirklich

$$\frac{\partial Y'}{\partial x'}\cdot\frac{\partial X}{\partial X'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}\cdot\frac{\partial Y}{\partial X'}\equiv 0 \text{ ist.}$$

Damit ist bewiesen, dass die Auflösungen der Gleichungen (10), bezüglich (5), mit der Umhüllungstransformation von (8) identisch sind.

Satz VI. „*Die* ∞^1 *Punkttransformationen (1) besitzen nur eine vollständige Umhüllungstransformation und es ist bei Bestimmung derselben gleichgültig, ob man von der (xy) Ebene oder von der (x'y') Ebene ausgeht.*“

Damit ist in der Ebene die Zurückführung der Lie'schen Berührungstransformationen auf die Punktransformationen vollständig abgeschlossen und zugleich die Methode klargelegt, deren wir uns im Folgenden immer bedienen werden, um aus bekannten Arten von Trans-

formationen neue zu gewinnen, es ist die Methode des Aufsuchens von Umhüllungstransformationen.

Vor der gewöhnlichen Ableitung der Lie'schen Berührungstransformationen aus Gleichungen von der Form:

$$f(x, y, x', y') = 0, \quad f'(x) + p \cdot f'(y) = 0, \quad f'(x') + p' \cdot f'(y') = 0$$

hat unsere Ableitung den Vorzug, dass bei ihr blos eine Unbekannte nämlich λ zu bestimmen ist, während dort x' und y', also zwei Unbekannte zu berechnen sind.

In den Lie'schen Berührungstransformationen haben wir schon eine specielle Art von Transformationen erster Ordnung, welche x' und y' als Functionen von x, y, p darstellen, kennen gelernt, allgemein wollen wir unter „Transformationen n^{ter} Ordnung" solche verstehen, welche x' und y' als Functionen von x, y, $p_1 \ldots p_n$ darstellen, wo $p_\varkappa = \frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa}$ ist.

Bei der Betrachtung der Transformationen höherer Ordnung, zu welcher wir jetzt übergehen, wollen wir uns folgender Abkürzungen bedienen:

$$\frac{d}{dx} f(x, y, p_1 \ldots p_m) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^m{}^{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1} \qquad (p_0 = y),$$

$$\frac{d'}{dx} f(x, y, p_1 \ldots p_m) = \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^{m-1}{}^{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1}.$$

Bedeutet φ eine zweite Function von $x, y, p_1 \ldots p_m$, so setzen wir noch:

$$\frac{d'f}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{d'\varphi}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_m} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} - \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_m} = |f\varphi|.$$

§ 2.

Die Berührungstransformationen höherer Ordnung in der Ebene.

Es liegt nahe, dasselbe Verfahren, welches uns in § 1 von den Punkttransformationen zu den Lie'schen Berührungstransformationen geführt hat, nun auf diese anzuwenden und also von ∞^1 Lie'schen Berührungstransformationen die Umhüllungstransformation aufzusuchen. In der That würde sich als unvollständige Umhüllungstransformation eine Berührungstransformation 2. O. ergeben, von solchen Transformationen aus würden wir zu Berührungstransformationen 3. O. gelangen u. s. w. bis zur n. O. Allein bei diesem Gange würden Wiederholungen unvermeidlich sein, deshalb ziehen wir es vor, gleich von den einfachsten Transformationen höherer Ordnung auszugehen. Wir verstehen unter „gewöhnlichen Transformationen n. O." solche von der

Form: $x' = X(x, y, p_1 \ldots p_n)$, $y' = Y(x, y, p_1 \ldots p_n)$, wobei X und Y zwei willkürlich gewählte Functionen sind, dergestalt jedoch, dass $p_1' = \dfrac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$ nicht frei von p_{n+1} wird, dass also:

$$|XY| = \frac{d'X}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{dp_n} - \frac{d'Y}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \neq 0$$

ist; nach dieser Bezeichnung sind offenbar die Punkttransformationen gewöhnliche Transformationen nullter Ordnung.

∞^1 gewöhnliche Transformationen $n - 1$. O. von der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \quad y' = Y(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \\ |XY| = \dfrac{d'X}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \dfrac{d'Y}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \neq 0 \end{cases}$$

liefern, wie in § 1 für den speciellen Fall der Punkttransformationen ($n = 1$) näher auseinandergesetzt ist, zu jeder Curve $y = y(x)$ zwei verschiedene Systeme von je ∞^1 C', nämlich die Curven $\lambda = \text{const.}$ und die Curven $x = \text{const.}$ Um besondere Fälle auszuschliessen, setzen wir voraus, dass $\dfrac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial \lambda} \neq 0$ ist und dass λ in X sowohl als in Y wirklich vorkommt: nunmehr suchen wir nach Anleitung des § 1 zu (1) die Umhüllungstransformationen.

A) Die Curven $\lambda = \text{const.}$ λ muss eine solche Function von x werden, dass die Gleichung:

$$(2a) \qquad \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{dY}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}$$

befriedigt wird.

B) Die Curven $x = \text{const.}$ x ist derart als Function von λ zu bestimmen, dass:

$$(2b) \qquad \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}$$

wird.

Beide Male erhalten wir dieselbe Bedingung:

$$(3) \qquad \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$$

und sehen somit, dass ∞^1 gewöhnliche Transformationen $n - 1$. O. nur eine, aber eine vollständige Umhüllungstransformation besitzen.

Um die Gleichung (3) auf eine einfachere Form zu bringen, ersetzen wir die Gleichungen (1) durch:

$$x' = X(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \quad y' = \overline{Y}(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, X),$$

wobei (3) übergeht in: $\frac{d\overline{Y}}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$.

Von dem Falle $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$ sehen wir natürlich ab und finden so, dass λ sich aus (3) immer als Function von p_n bestimmt, so lange nicht $-p_n = \frac{\frac{d'\overline{Y}}{dx}}{\frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-1}}}$ von λ oder also von X frei wird, d. h. so lange nicht $\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \equiv 0$ ist.

Wie man sich leicht überzeugt, ist $\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \equiv 0$, wenn $\overline{Y}$ die Form hat: $\overline{Y}(\varphi_1 \ldots \varphi_n, X)$, worin $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ n unabhängige Functionen von $x, y, p_1 \ldots p_{n-1}$ sind, welche paarweise ergeben $| \varphi_i \varphi_k | \equiv 0$; es lässt sich auch zeigen, dass nur in diesem Falle $\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \equiv 0$ ist, was wir jedoch hier nicht näher auseinandersetzen wollen. Sowie also:

$$\left| \overline{Y} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \right| \not\equiv 0$$

ist, erhalten wir durch Substitution des Werthes von λ aus (3) in (1) als vollständige Umhüllungstransformation von (1):

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \Xi(x, y, p_1 \ldots p_n), \quad y' = \mathrm{H}(x, y, p_1 \ldots p_n), \quad p_1' = \Pi_1(x, y, p_1 \ldots p_n), \\ | \Xi \mathrm{H} | = \frac{d'\Xi}{dx} \cdot \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n} - \frac{d'\mathrm{H}}{dx} \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n} - \Pi_1 \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv 0. \end{cases}$$

Die Relationen zwischen Ξ, H, Π_1 ergeben sich leicht, wenn man zu der Gleichung (3) hinzunimmt, dass

$$\frac{d'\Xi}{dx} = \frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx}, \quad \frac{\partial \Xi}{\partial p_n} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n}$$

u. s. w. ist und endlich noch beachtet, dass $\frac{d\mathrm{H}}{dx} - \Pi_1 \cdot \frac{d\Xi}{dx} \equiv 0$ werden muss.

(4) ist eine Transformation n. O., welche Berührung *n*. O. von Curven der (xy) Ebene in Berührung wenigstens erster Ordnung auf der $(x'y')$ Ebene verwandelt, wir nennen daher (4) eine „Berührungstransformation *n*ter Ordnung“ im Gegensatze zu den gewöhnlichen Transformationen *n*. O., welche Berührung *n*. O. von (xy) Curven zerstören. Also:

Satz I. „∞^1 *gewöhnliche Transformationen $n - 1$. O. besitzen im allgemeinen eine Berührungstransformation n. O. als vollständige Umhüllungstransformation.*“

Fassen wir nun (4) als die allgemeinen Definitionsgleichungen der Berührungstransformationen *n*. O. auf, so können wir leicht ∞^1 gewöhnliche Transformationen $n - 1$. O. angeben, welche (4) zur voll-

ständigen Umhüllungstransformation haben, es sind dies die Transformationen:

$$x' = \Xi\,(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \varphi), \quad y' = \mathrm{H}\,(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \varphi),$$

wo φ eine willkürliche Function von $x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda$ ist. Denn beim Aufsuchen der Umhüllungstransformation erhalten wir für λ die Gleichung:

$$\frac{d'\Xi}{dx} \cdot \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \varphi} - \frac{d'\mathrm{H}}{dx} \cdot \frac{\partial \Xi}{\partial \varphi} = 0,$$

da $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ natürlich $\neq 0$ sein muss, die Substitution $\varphi = p_n$ verwandelt aber die Gleichung in die Identität $| \Xi \mathrm{H} | \equiv 0$, bestimmt λ als Function von p_n und führt von den ∞^1 gewöhnlichen Transformationen $n-1$. O. zur Berührungstransformation n. O. (4) zurück.

Satz II. „*Jede Berührungstransformation n. O. lässt sich auf unbegränzt viele Weisen als vollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 gewöhnlichen Transformationen $(n-1)$. O. darstellen.*“

Wesentlich anders als bei ∞^1 gewöhnlichen Transformationen $n-1$. O. verhält es sich mit den Umhüllungstransformationen von ∞^1 Berührungstransformationen $(n-1)$. O.:

$$(5) \qquad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \quad y' = Y(x, y, p_1 \ldots p_{n-1}, \lambda), \\ | XY | = \dfrac{d'X}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \dfrac{d'Y}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv 0. \end{cases}$$

A) *Die Curven $\lambda = const.$* Es muss werden:

$$p_1' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}}}{\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}} = \frac{\frac{dY}{dx} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}}{\frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}},$$

also bekommt man für λ die Gleichung:

$$(6\text{a}) \qquad \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0.$$

B) *Die Curven $x = const.$* Man hat die Gleichung:

$$p_1' = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}{\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}$$

zu befriedigen und erhält daraus die Bedingung:

$$\frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0;$$

nimmt man hinzu, dass

$$| XY | = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv 0$$

ist, so zeigt sich, dass man entweder auch hier auf die Gleichung (6a) kommt oder auf die beiden Gleichungen:

(6b) $$\frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{dY}{dx} = 0,$$

welche nicht von einander unabhängig sind, da ja $|XY| \equiv 0$ ist.

Die Curven $\lambda =$ const. und die Curven $x =$ const. besitzen also auch hier eine gemeinsame Enveloppe bestimmt durch die Gleichung (6a) und dieser entsprechend besitzen die Transformationen (5) eine vollständige Umhüllungstransformation; diese ist, da die Gleichung (6a) im allgemeinen für λ eine Function von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}$ ergiebt, eine Berührungstransformation $n - 1$. O.

Aber die Curven $x =$ const. haben noch eine besondere Enveloppe, welche von den Curven $\lambda =$ const. nicht eingehüllt wird, dieselbe bestimmt sich aus (6b) und da hieraus für λ im allgemeinen eine Function von p_n folgt, erhalten wir zu (5) noch eine Berührungstransformation n. O. als unvollständige Umhüllungstransformation.

Satz III. „∞^1 *Berührungstransformationen $n - 1$. O. besitzen im allgemeinen eine vollständige und eine unvollständige Umhüllungstransformation, jene ist eine Berührungstransformation $n - 1$. O., diese eine solche von der n. O.*“

Die Gleichung (6a) geht, wenn man Y auf die Form:

$$\overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, X)$$

bringt, über in: $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-1}} = 0$, denn der Fall $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 0$ kann nicht in Betracht kommen; sie bestimmt daher λ immer, falls nicht $\frac{\partial}{\partial p_{n-1}} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \equiv 0$ ist.

Die Gleichungen (6b) bestimmen λ nur dann nicht als Function von p_n, wenn $-p_n = \dfrac{\frac{d'X}{dx}}{\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}}$ von λ frei ist oder also, wenn $\left| X \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right| \equiv 0$ ist. In diesem Falle ist wegen

$$\frac{\frac{d'Y}{dx}}{\frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}}} = \frac{\frac{d'X}{dx}}{\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}}$$

auch $\left| Y \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right| \equiv 0$ und es lässt sich zeigen, dass dann X und Y die Form haben:

$$X = \overline{X}(\varphi_1 \dots \varphi_n, \lambda), \quad Y = \overline{Y}(\varphi_1 \dots \varphi_n, \lambda),$$

wo $\varphi_1 \dots \varphi_n$ n unabhängige Functionen von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}$ sind, welche paarweise $|\varphi_i \varphi_\varkappa| \equiv 0$ ergeben.

Noch wollen wir eine wichtige Eigenschaft der unvollständigen Umhüllungstransformation von (5) erwähnen. Dieselbe sei:

$$(7)\begin{cases} x' = \Xi(x, y, p_1 \dots p_n),\ y' = \mathsf{H}(x, y, p_1 \dots p_n),\ p_1' = \Pi_1(x, y, p_1 \dots p_n), \\ |\Xi\,\mathsf{H}| \equiv 0,\ \dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial p_n} - \Pi_1 \cdot \dfrac{\partial \Xi}{\partial p_n} \equiv 0, \end{cases}$$

wir haben dann:

$$\frac{d'\Xi}{dx} = \frac{dX}{dx} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{d'\lambda}{dx},$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial p_n} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n},$$

vorausgesetzt, dass für λ der aus (6b) folgende Werth substituirt wird.

Hieraus finden sich die später zu benutzenden Gleichungen:

$$(8) \qquad |\Xi\,\lambda| \equiv 0, \quad |\mathsf{H}\,\lambda| \equiv 0.$$

Wir stellen nun noch verschiedene Eigenschaften der Berührungstransformationen höherer Ordnung in einer Reihe von Sätzen zusammen.

Satz IV. „*In einer Berührungstransformation n. O.:*

$$(9)\begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_n), \quad y' = Y(x, y, p_1 \dots p_n). \\ |X\,Y| = \dfrac{d'X}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_n} - \dfrac{d'Y}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0 \end{cases}$$

sind die Functionen X und Y immer in Bezug auf p_{n-1} und p_n unabhängig oder es ist:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \not\equiv 0.“$$

Beweis. Verschwände der eben genannte Ausdruck, so müsste Y die Form haben:

$$Y = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-2}, X),$$

also wäre:

$$\frac{d'Y}{dx} = \frac{d\overline{Y}}{dX} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial x} \cdot \frac{d'X}{dx}, \quad \frac{\partial Y}{\partial p_n} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n};$$

die Identität $|X\,Y| \equiv 0$ nähme mithin die Gestalt an: $\dfrac{d\overline{Y}}{dx} \equiv 0$, denn $\dfrac{\partial X}{\partial p_n}$ ist nothwendig $\not\equiv 0$. Differentiirt man die letzte Gleichung einmal nach p_{n-1} und dann nach p_n, so kommt:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-2}} \equiv 0,$$

woraus $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-2}} \equiv 0$ folgt; ebenso würde sich $\dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-3}} \equiv 0$ ergeben u. s. w., so dass man schliesslich für Y die Form $Y = \overline{Y}(X)$ erhielte, welche natürlich ausgeschlossen ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz V. „*In ∞^1 Berührungstransformationen $n - 1$. O. $(n > 1)$:*

$$(10)\quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda),\ y' = Y(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \\ \qquad | X Y | = \dfrac{d'X}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - \dfrac{d'Y}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv 0 \end{cases}$$

sind die Functionen X und Y, wenn sie beide λ wirklich enthalten, stets unabhängig i. B. auf p_{n-1} und λ d. h. es ist:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} \not\equiv 0.\text{“}$$

Beweis. Wäre die angeführte Determinante wirklich $\equiv 0$, so müsste $Y = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-2}, X)$ sein, also:

$$\frac{d'Y}{dx} = \frac{d\overline{Y}}{dx} + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{d'X}{dx}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}};$$

aus $| X Y | \equiv 0$ würde $\frac{d\overline{Y}}{dx} \equiv 0$ werden, denn $\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}}$ ist ja $\not\equiv 0$. Differentiirt man die letzte Identität nach p_{n-1} und nach λ, so überzeugt man sich leicht, dass $\frac{\partial \overline{Y}}{\partial p_{n-2}} \equiv 0$ sein würde u. s. w., kurz es müsste $Y = \overline{Y}(X)$ sein, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz VI. *„Jede Berührungstransformation n. O.:*

$$(11)\quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_n),\quad y' = Y(x, y, p_1 \dots p_n), \\ \qquad |X Y| = \dfrac{d'X}{dx} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial p_n} - \dfrac{d'Y}{dx} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0. \end{cases}$$

lässt sich als unvollständige Umhüllungstransformation von ∞^1 Berührungstransformationen $n - 1$. O. darstellen.“

Beweis. Wir ersetzen in (3), p_n durch eine noch zu bestimmende Function φ von $x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda$ und erhalten so die ∞^1 Transformationen n. O.:

$$(12)\quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \varphi) = \overline{X}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda), \\ y' = X(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \varphi) = \overline{Y}(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda). \end{cases}$$

Nehmen wir an (12) stellt ∞^1 Berührungstransformationen $n - 1$. O. dar, welche (11) zur Umhüllungstransformation haben, so muss (cf. die Gleichungen (8) und das Vorhergehende) aus $p_n = \varphi$ sich für λ eine Function von $x, y, p_1 \dots p_n$ ergeben, welche $|X\lambda| \equiv 0$ und $| Y\lambda | \equiv 0$ macht. Bestimmen wir nun λ aus den nicht von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(13)\qquad |X\lambda| = 0, \quad |Y\lambda| = 0,$$

so erhalten wir als allgemeinste Lösung: $\lambda = F(x, y, \Psi_1 \dots \Psi_{n-1})$ $\{$wenn $|X\Psi_\varkappa| \equiv 0$ $(\varkappa = 1, \dots\ n - 1)$, woraus dann von selbst folgt, dass auch $|Y\Psi_\varkappa| \equiv 0$ und $|\Psi_i\Psi_\varkappa| \equiv 0$ ist$\}$; berechnen wir hieraus $p_n = \varphi(x, y, p_1 \dots p_{n-1}, \lambda)$, so stellt, wie wir behaupten, für diesen Werth von φ, (12) wirklich Berührungstransformationen $n - 1$. O.

bar und besitzt wirklich [illegible] als Umhüllungstransformation. Es ist nämlich bei Substitution des betreffenden Werthes von λ:

$$\frac{dX}{dx} \equiv \frac{d\bar{X}}{dx} + \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dx}, \quad \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv \frac{\partial \bar{X}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n},$$

also:

$$(X\lambda) \equiv \frac{d\bar{X}}{dx} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} \equiv 0$$

und:

$$(Y\lambda) \equiv \frac{d\bar{Y}}{dx} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} \equiv 0,$$

d. h. λ genügt gleichzeitig den beiden Gleichungen:

$$\frac{d\bar{X}}{dx} = 0 \text{ und } \frac{d\bar{Y}}{dx} = 0,$$

denn $\frac{\partial \lambda}{\partial p_n}$ ist sicher $\neq 0$.

Weiter ist auch $(\bar{X}\bar{Y}) \equiv 0$, denn diese Gl. wird identisch erfüllt, wenn man darin für λ seinen Werth setzt. p_n kommt aber in dem Ausdruck $(\bar{X}\bar{Y})$ gar nicht vor, wohl aber in dem Werthe von λ: wir schliessen daraus, dass $(\bar{X}\bar{Y})$ schon vor jener Substitution, dass es an und für sich $\equiv 0$ ist. Damit ist unsere letzte Behauptung und der ganze Satz erwiesen.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes VI kommt man leicht auf den folgenden:

Satz VII. *„Jede Berührungstransformation n. O. lässt sich darstellen als eine $n-1$^te^ Umhüllungstransformation von ∞^{n-1} Lie'schen Berührungstransformationen oder als eine n^te^ Umhüllungstransformation von ∞^n Punkttransformationen."*

Wir haben bislang im Gebiete der $(x'y')$ nur den ersten Differentialquotienten p_1' von y' in Betracht gezogen und gefunden, dass eine Berührungstransformation n. O. für x', y', p_1' Functionen von $x, y, p_1 \dots p_n$ ergiebt; es bleibt noch zu untersuchen, wie sich die Differentialquotienten höherer Ordnung, zunächst p_2' darstellen.

Gegeben sei die Berührungstransformation n. O.:

$$(15) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, p_1 \dots p_n), \; y' = Y(x, y, p_1 \dots p_n), \; p_1' = P_1(x, y, p_1 \dots p_n), \\ (XY) = \frac{dX}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{dY}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial p_n} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0. \end{cases}$$

Setzen wir:

$$(16) \qquad \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \equiv \varrho, \text{ so ist } \varrho \neq 0,$$

weil nach Satz IV: $\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \neq 0$ ist.

Aus $|XY| \equiv 0$ ergiebt sich leicht:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \sum_0^{n-2}{}_{\varkappa} \frac{\partial Y}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1} - P_1 \cdot \left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \sum_0^{n-2}{}_{\varkappa} \frac{\partial X}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1}\right\} \equiv - \varrho \cdot p_n.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach p_n und subtrahiren sie dann von der Identität:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^{n-2}{}_{\varkappa} \frac{\partial f}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1} \equiv 0 \left(f = \frac{\partial Y}{\partial p_n} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0\right),$$

so kommt:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \sum_0^{n-2}{}_{\varkappa} \frac{\partial X}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1}\right) \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \sum_0^{n-2}{}_{\varkappa} \frac{\partial P_1}{\partial p_\varkappa} \cdot p_{\varkappa+1}\right) \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv \varrho + p_n \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial p_n}.$$

Ausserdem folgt aus der Definitionsgleichung von ϱ und aus:

$$\frac{\partial Y}{\partial p_n} - P_1 \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0$$

leicht:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \frac{\partial P_1}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv - \frac{\partial \varrho}{\partial p_n},$$

also geht die vorige Gleichung über in:

$$\frac{d'X}{dx} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \frac{d'P_1}{dx} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv \varrho$$

und analog wegen $|XY| \equiv 0$:

$$\frac{d'Y}{dx} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} - \frac{d'P_1}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} \equiv \varrho \cdot \frac{\frac{\partial Y}{\partial p_n}}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} \equiv \varrho \cdot P_1.$$

Es ist demnach:

$$(17) \qquad |XP_1| \equiv \varrho, \quad |YP_1| \equiv \varrho \cdot P_1.$$

Soll nun die Transformation (15) die Eigenschaft haben, auch für $p_2' = \frac{\frac{dP_1}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$ einen von p_{n+1} freien Werth P_2 zu ergeben, so muss $\frac{\frac{dP_1}{dx}}{\frac{dX}{dx}} \equiv \frac{\frac{\partial P_1}{\partial p_n}}{\frac{\partial X}{\partial p_n}}$ oder $|XP_1| \equiv 0$ sein, das ist aber nach dem Vorhergehenden unmöglich, so lange nicht $\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \equiv 0$ ist und also nach Satz IV die Transformation (13) die Gestalt hat:

$$x' = X(x, y, p_1 \dots p_n), \quad y' = Y(X).$$

Damit ist bewiesen, dass in keiner Transformation n. O. p'_2 eine Function allein der Differentialquotienten, welche X und Y enthalten, sein kann.

Satz VIII. *„Es giebt keine Transformation n. O., welche Berührung n. O. von Curven der (xy) Ebene in Berührung von höherer als der ersten Ordnung auf der $(x'y')$ Ebene verwandelte.“*

Zugleich giebt der eben ausgesprochene Satz die Antwort auf die Frage, welche Bäcklund in den Annalen Bd. IX, 297 ff. behandelt und erledigt hat, ob es Transformationen der ebenen Curven giebt, welche Berührung n. O. wieder in Berührung n. O. überführen, Berührung niederer Ordnung aber zerstören; wir finden mit Bäcklund, dass es solche Transformationen nicht giebt. Noch eine Folgerung können wir aus den Gleichungen (17) ziehen:

Satz IX. *„Jede Berührungstransformation n. O. ist nach p_{n-1}, p_n und einer von den übrigen Variablen $x, y, p_1 \dots p_{n-2}$ auflösbar.“*

Beweis. Im entgegengesetzten Falle müssten alle Determinanten von der Form $\sum \pm \frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \equiv 0$ sein $(t = x, y, p_1 \dots p_{n-1})$. Diese Gleichungen bezüglich mit $1, p_1 \dots p_n$ multiplicirt und addirt würden $\sum \pm \frac{d'X}{dx} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial p_n} \equiv 0$ ergeben oder:

$$\frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot |Y P_1| - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot |X P_1| + \frac{\partial P_1}{\partial p_{n-1}} \cdot |X Y| \equiv 0;$$

daraus würde

$$\frac{\varrho}{\frac{\partial X}{\partial p_n}} \cdot \left\{ \frac{\partial X}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial Y}{\partial p_{n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial p_n} \right\} \equiv 0$$

folgen, was ausgeschlossen ist.

Wir verlassen nun die Transformationen der ebenen Curven und wenden uns dazu, die Entwickelungen des § 1 auf die Räume höherer Dimensionen auszudehnen.

§ 3.

Die Lie'schen Berührungstransformationen im Raume von $n + 1$ Dimensionen.

Im Raume von $n + 1$ Dimensionen d. h. im Gebiete von $n + 1$ Variablen $(x_1 \dots x_n, z)$ sondert jede Gleichung $z = z(x_1 \dots x_n)$ ∞^n Punkte ab, sie stellt also eine Punktmannigfaltigkeit von n Dimensionen, eine M_n dar. Mit den Transformationen solcher M_n werden wir

uns hier beschäftigen und gehen zu diesem Behufe von ∞^m Punkttransformationen zwischen den Räumen:

$$R_{n+1}:(x_1\ldots x_n,\, z) \text{ und } R'_{n+1}:(x_1'\ldots x_n',\, z')$$

aus; dieselben seien:

$$(1)\qquad \begin{cases} z' = Z(x_1\ldots x_n,\, z,\, \lambda_1\ldots\lambda_m), \\ x_i' = X_i(x_1\ldots x_n,\, z,\, \lambda_1\ldots\lambda_m) \\ \qquad (i = 1\ldots n). \end{cases}$$

Dabei sehen wir von den blossen Punktconstructionen vollständig ab, nehmen also $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z} \not\equiv 0$ an, ausserdem mögen, wenn $f_1\ldots f_m$ irgend m von den Functionen $X_1\ldots X_n,\, Z$ bedeuten, nicht alle Determinanten von der Form $\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1}\cdots\frac{\partial f_m}{\partial \lambda_m} \equiv 0$ sein und zwar wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \not\equiv 0$ ist.

Wie in § 1 betrachten wir die Gesammtheit der Transformationen (1) als eine Abbildung des Raumes R_{n+1} auf R'_{n+1} und bemerken wieder, dass das Punktgebilde des R'_{n+1}, welches einer M_n des R_{n+1} entspricht, zwei verschiedene Auffassungen zulässt. Einmal nämlich ergiebt unter den gemachten Voraussetzungen jede einzelne der Transformationen (1) zu der $M_n : z = z\,(x_1\ldots x_n)$ eine M_n' des R'_{n+1}, im Ganzen also liefern uns die ∞^m Punkttransformationen auch ∞^m verschiedene M_n', welche wir als die $M_n' : \lambda = \text{const.}$ bezeichnen können, ihre Gleichung $z' = z'(x_1'\ldots x_n',\, \lambda_1\ldots\lambda_m)$ ergiebt sich durch Elimination von $x_1\ldots x_n$ aus den Gleichungen (1), in denen $z = z\,(x_1\ldots x_n)$ zu setzen ist.

Dagegen erhalten wir bei (1) zu jedem Punkte des R_{n+1} ∞^m Punkte des R'_{n+1} oder eine Mannigfaltigkeit von m Dimensionen, eine M_m', so dass also auf diese Weise unserer M_n, die ja ∞^n Punkte enthält, ∞^n verschiedene M_m' entsprechen, welche die $M_m' : x = \text{const.}$ heissen mögen. In den Coordinaten $(x'\, z')$ werden diese M_m' durch die $n - m + 1$ Gleichungen: $f_\varrho\,(x_1'\ldots x_n',\, z',\, x_1\ldots x_n,\, z\,(x_1\ldots x_n)) = 0$ $(\varrho = 1\ldots n - m + 1)$ dargestellt, welche sich bei den von uns gemachten Annahmen aus (1) durch Elimination von $\lambda_1\ldots\lambda_m$ ergeben. Hier stehen uns also wieder zwei Wege offen, um zu einer Umhüllungstransformation von (1) zu gelangen, indem wir einmal zu den $M_n' : \lambda = \text{const.}$, dann zu den $M_m' : x = \text{const.}$ die Umhüllungsgebilde aufsuchen und der betreffenden M_n des R_{n+1} zuordnen; beide Wege wollen wir einschlagen.

A) *Die* $M_n' : \lambda = $ *const.* Fasst man $x_1\ldots x_n$ als unabhängige Va-

riable auf, so bestimmen sich die $\frac{\partial z'}{\partial x'_i} = p'_i$ als Functionen von $x_1 \dots x_n, z, p_1 \dots p_n \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$ aus den Gleichungen:

$$\text{(2a)} \qquad \frac{dZ}{dx_\alpha} - \sum_1^n {}^i p'_i \cdot \frac{dX_i}{dx_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1 \dots n),$$

in welche die Bedingung $dz' - \sum_1^n {}^i p'_i \,.\, dx'_i = 0$ nach Einführung der Gleichungen (1) zerfällt; unter $\frac{d}{dx_\alpha} f(x_1 \dots x_n, z)$ wird dabei der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$ verstanden. Um die Enveloppe der ∞^m M'_n herzustellen, haben wir in (1) für $\lambda_1 \dots \lambda_m$ derartige Functionen von $x_1 \dots x_n$ einzusetzen, dass die so erhaltene M'_n alle die ∞^m M'_n und zwar jede derselben längs einer M'_{n-m} berührt oder, dass die neuen p'_i aus den alten hervorgehen, wenn man in diesen für $\lambda_1 \dots \lambda_m$ ihre Werthe setzt.

Sollen nun die Gleichungen für die neuen p'_i:

$$\frac{dZ}{dx_\varkappa} - \sum_1^n {}^i p'_i \cdot \frac{dX_i}{dx_\varkappa} + \sum_1^m {}^\varepsilon \left\{ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^n {}^i p'_i \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial x_\varkappa} = 0$$

mit den Gleichungen (2a) verträglich sein, so muss werden:

$$\text{(3a)} \qquad \sum_1^m {}^\varepsilon \left\{ \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^n {}^i p'_i \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{\partial \lambda_\varepsilon}{\partial x_\varkappa} = 0 \ (\varkappa = 1 \dots n).$$

Wären ferner $\lambda_1 \dots \lambda_m$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$ nicht von einander unabhängig, so würde es Werthsysteme $(\lambda_1 \dots \lambda_m)$ geben, zu welchen kein Werthsystem $(x_1 \dots x_n)$ gehörte, d. h. es würden unter den ∞^m M'_n solche existiren, welche die gesuchte Umhüllungs-M'_n nicht berührten. Das geht nicht an, also können nicht alle Determinanten von der Form: $\sum \pm \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi_1} \cdots \frac{\partial \lambda_m}{\partial \xi_m} \equiv 0$ sein, wenn $\xi_1 \dots \xi_m$ irgend m von den Variablen $x_1 \dots x_n$ bedeuten. In Folge dessen reduciren sich die Gleichungen (3a) auf:

$$\text{(4a)} \qquad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^n {}^i p'_i \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \dots m).$$

Die zur gegebenen M_n gehörige M'_n ergiebt sich durch Elimination der x, λ, p' aus (1), (2a) und (4a) oder durch Elimination der x und der λ aus (1) und:

(5) $$\sum \pm \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \ldots m),$$

überall ist natürlich $z = z(x_1 \ldots x_n)$ zu setzen.

B) *Die* $M'_m : x = const.$ Unser Bestreben wird selbstverständlich dahin gehen, auch hier zu einer solchen Umhüllungstransformation von (1) zu gelangen, welche jeder M_n des R_{n+1} wieder eine M'_n des R'_{n+1} zuordnet. Es handelt sich daher darum, ob die $M'_m : x = $ const. von einer M'_n eingehüllt werden und da es gerade ∞^n M'_m sind, liegt es nahe zu vermuthen, dass es eine M'_n giebt, die in jedem ihrer ∞^n Punkte eine der ∞^n M'_m berührt.

Was zunächst die M'_m betrifft, so sehen wir $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ und von den Variablen (x', z') etwa $x'_1 \ldots x'_m$ als die unabhängigen Variablen an; setzen wir dann: $\frac{\partial z'}{\partial x'_i} = q_i^0$, $\frac{\partial x'_\varkappa}{\partial x'_i} = q_i^\varkappa \, (i = 1 \ldots m, \; \varkappa = m+1 \ldots n)$ und verstehen ausserdem der Kürze wegen unter x'_0, X_0 bezüglich z', Z, so erhalten wir aus den Bedingungen:

$$dx'_\varkappa - \sum_1^m {}^i q_i^\varkappa \cdot dx'_i = 0 \quad (\varkappa = 0, m+1 \ldots n)$$

die folgenden Gleichungen:

(2b) $$\frac{\partial X_\varkappa}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^m {}^i q_i^\varkappa \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \ldots m, \; \varkappa = 0, m+1 \ldots n),$$

woraus sich die $q_i^\varkappa$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ bestimmen, immer vorausgesetzt, dass $z = z(x_1 \ldots x_n)$ gesetzt wird.

Um andererseits aus den Gleichungen (1) eine M'_n der verlangten Art zu erhalten, werden wir $x_1 \ldots x_n$ als unabhängige Variable betrachten können und müssen dann $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ in passender Weise als ihre Functionen bestimmen, nämlich derart, dass in jedem Punkte $(x_1 \ldots x_n)$ der gesuchten M'_n eine auf derselben liegende M'_m vorhanden ist, welche die bei (1) zu $(x_1 \ldots x_n)$ gehörige M'_m in dem entsprechenden Punkte $(\lambda_1 \ldots \lambda_m)$ berührt. In der Hauptsache lassen sich alle M'_m, welche auf der gesuchten M'_n liegen, dadurch darstellen, dass für $x_{m+1} \ldots x_n$ Functionen von $x_1 \ldots x_m$ gesetzt werden, daher ergeben sich die Werthsysteme der $q_i^\varkappa$, welche zu diesen M'_m gehören aus den Gleichungen:

$$\sum_1^m {}^\varepsilon \left\{ \frac{\partial X_\varkappa}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^m {}^i q_i^\varkappa \cdot \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{d\lambda_\varepsilon}{dx_\alpha} + \frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^n {}^\beta \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} -$$
$$- \sum_1^m {}^i q_i^\varkappa \cdot \left\{ \frac{dX_i}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^n {}^\beta \frac{dX_i}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right\} = 0$$
$$(\alpha = 1 \ldots m, \quad \varkappa = 0, m+1 \ldots n).$$

Diese Gleichungen, in denen die λ als noch zu bestimmende Functionen von $x_1 \dots x_n$ zu denken sind, liefern zu jedem Werthcomplex $\left(x_\alpha, x_\beta, \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}, \ \alpha = 1 \dots m, \ \beta = m+1 \dots n\right)$ Werthe der $q_i^\varkappa$. Eine M'_m, welche auf der zu findenden M'_n liegt, durch den Punkt $(x_1 \dots x_n)$ geht und dort gewisse Werthe $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ ergiebt, wird die zu $(x_1 \dots x_n)$ gehörige von den ∞^n M'_m berühren, wenn für sie die letzten Gleichungen dieselben Werthe der $q_i^\varkappa$ liefern wie die Gleichungen (2b). Soll dies der Fall sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\text{(3b)} \quad \frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^{n}{}^\beta \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} - \sum_{1}^{m}{}^i q_i^\varkappa \cdot \left\{ \frac{dX_i}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^{n}{}^\beta \frac{dX_i}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right\} = 0$$

$$(\alpha = 1 \dots m, \quad \varkappa = 0, m+1 \dots n).$$

Unsere Aufgabe ist nunmehr die λ, $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ und $q_i^\varkappa$ derart als Functionen von $x_1 \dots x_n$ zu bestimmen, dass die Gleichungen (2b) und (3b) identisch erfüllt werden; dann nämlich erhalten wir aus (1) eine M'_n und in jedem Punkte derselben (etwa in $(x_1^0 \dots x_n^0)$) giebt es M'_m, welche die $M'_m : (x_1^0 \dots x_n^0)$ der $n$fachen Schaar von M'_m berühren d. h. mit ihr gleiche Werthe $(q_i^\varkappa)^0$ ergeben. Es ist sehr leicht eine solche M'_m anzugeben; denn gehören zu $(x_1^0 \dots x_n^0)$ die Werthe $\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^0$, so genügt die M'_m:

$$x_\beta = x_\beta^0 + \sum_{1}^{m}{}^\alpha (x_\alpha - x_\alpha^0) \cdot \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^0 \quad (\beta = m+1 \dots n)$$

allen Anforderungen, da sie mit der $M'_m : (x_1^0 \dots x_n^0)$ in dem Punkte $(\lambda_1^0 \dots \lambda_m^0)$ gleiche Werthe $(q_i^\varkappa)^0$ besitzt.

Die Zahl der Unbekannten λ, $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$, $q_i^\varkappa$ ist:

$$m + m(n-m) + m(n-m+1) = 2m \, . \, (n-m+1);$$

um dieselben zu finden, reichen die Gleichungen (2b) und (3b), ebenfalls $2m \, . \, (n-m+1)$ an der Zahl, gerade aus und wir wollen nun vor allen Dingen die λ als Functionen der $x_1 \dots x_n$ bestimmen, denn das genügt, um die verlangte M'_n darzustellen. Schaffen wir aus (2b) und (3b) zunächst die $q_i^\varkappa$ fort, so kommen wir auf die Gleichungen:

$$\sum \pm \left(\frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha} + \sum_{m+1}^{n}{}^\beta \frac{dX_\varkappa}{dx_\beta} \cdot \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} = 0,$$

welche sich schreiben lassen:

$$\text{(4b)}\quad \left\{\begin{array}{l} \sum \pm \frac{dX_\varkappa}{dx_\alpha}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}+\sum_{m+1}^{n}{}_\beta\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\cdot\sum\pm\frac{dX_\varkappa}{dx_\beta}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}=0 \\ \qquad (\alpha=1\ldots m,\quad \varkappa=0,\quad m+1\ldots n). \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen bestimmen die λ und die $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ und zwar erhalten wir für die λ allein folgende Gleichungen:

$$\varDelta_\alpha=\sum\pm\left[\sum\pm\frac{dZ}{dx_\alpha}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\right]\cdot\left[\sum\pm\frac{dX_{m+1}}{dx_{m+1}}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\right]\cdots$$
$$\cdots\left[\sum\pm\frac{dX_n}{dx_n}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\right]=0\quad(\alpha=1\ldots m).$$

Vergleicht man mit Δ_α die Determinante:

$$D_\alpha=\sum\pm\frac{dZ}{dx_\alpha}\cdot\frac{dX_{m+1}}{dx_{m+1}}\cdots\frac{dX_n}{dx_n}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m},$$

so zeigt sich, dass:

$$\Delta_\alpha\cdot\sum\pm\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\doteq D_\alpha\cdot\left[\sum\pm\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\right]^{n-m+1}$$

ist, wie sich leicht ergiebt, wenn man in D_α die $n-m+1$ ersten Reihen Glied für Glied mit:

$$\sum\pm\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}$$

multiplicirt und zu jeder dieser Reihen die m letzten Reihen addirt, nachdem man dieselben mit geeigneten Unterdeterminanten von bezüglich:

$$\sum\pm\frac{dX_\varkappa}{dx_i}\cdot\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\quad(\varkappa=0,m+1\ldots n,\ i=\alpha,m+1\ldots n)$$

multiplicirt hat.

Da nun $\sum\pm\frac{\partial X_1}{\partial\lambda_1}\cdots\frac{\partial X_m}{\partial\lambda_m}\ne 0$ ist, gehen die Gleichungen $\Delta_\alpha=0$ über in die Gleichungen $D_\alpha=0$ $(\alpha=1\,.\,.\,m)$, welche ihrerseits wiederum den Gleichungen (2a) und (4a) zusammengenommen, also auch den Gleichungen (5) aequivalent sind. Wir können daher sagen: $\lambda_1\,.\,.\,\lambda_m$ bestimmen sich aus den Gleichungen (5), ausserdem ergeben noch die Gleichungen (4b) die Werthe der $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$, die Gleichungen (2b) die Werthe der $q_i^\varkappa$.

Da man für die λ bei A) und bei B) ein und dieselben Functionen von $x_1 \dots x_n$ erhält, ist es klar, dass man hier wie dort zu derselben Umhüllungs-M'_n, also auch zu derselben Umhüllungstransformation gelangt.

Die gefundene M'_n hüllt, wie wir wissen die ∞^n $M'_m : x =$ const. ein, aber sie besteht im allgemeinen keineswegs aus Systemen von M'_m, welche in jedem ihrer Punkte eine der ∞^n $M'_m : x =$ const. berühren; soll dies der Fall sein, so müssen die aus (4b) folgenden Gleichungen $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = F^\beta_\alpha(x_1 \dots x_n)$, als Differentialgleichungen angesehen, $x_{m+1} \dots x_n$ als Functionen von $x_1 \dots x_m$ bestimmen, das tritt nur dann ein, wenn $m \cdot (n - m)$, die Zahl dieser Differentialgleichungen $= n - m$ ist d. h. $=$ der Anzahl der unbekannten Functionen x_β. Beide Zahlen werden nur für $m = n$ und für $m = 1$ einander gleich, sonst ist immer die Anzahl der Gleichungen die grössere. Bei $m = n$ treten die $\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}$ gar nicht auf, die ∞^n $M'_m : x =$ const. sind ebensoviele M'_n, welche offenbar eine Umhüllungs M'_m (M'_n) besitzen; ist dagegen $m = 1$, so hat man $n - 1$ gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_\beta}{dx_1} = F_1{}^\beta\,(x_1 \dots x_n) \quad (\beta = 2 \dots n),$$

welche $x_2 \dots x_n$ als Functionen von x_1 und $n - 1$ willkürlichen Constanten bestimmen, hier setzt sich daher unsere Umhüllungs M'_n aus den ∞^{n-1} Umhüllungs-M_1' der ∞^n $M_1' : x =$ const. zusammen.

Die gewonnenen Resultate können wir in folgender Verallgemeinerung des Satzes I, § 1 zusammenfassen:

Satz I. „*Die ∞^m $M_n : v =$ const. und die ∞^n $M_m : u =$ const. des Raumes $x_1 \dots x_{n+1}$, welche durch $n + 1$ Gleichungen von der Form:*

$$x_i = X_i(u_1 \cdots u_n,\ v_1 \dots v_m) \quad (i = 1 \dots n + 1)$$

bestimmt sind, werden von ein und derselben M_n eingehüllt."

Die wichtigste Frage ist nun offenbar die, ob $\lambda_1 \cdots \lambda_m$, $p_1' \cdots p_n'$ sich aus den Gleichungen (2a) und (4a) wirklich als Functionen von $x_1 \cdots x_n$, $p_1 \dots p_n$ bestimmen.

Um dies zu entscheiden, stellen wir, da ja

$$\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \neq 0$$

ist, aus den Gleichungen $X_\alpha = X_\alpha(x_1 \cdots x_n, z, \lambda_1 \cdots \lambda_m)$ $(\alpha = 1 \dots m)$ die λ als Functionen von $x_1 \cdots x_n, z, X_1 \dots X_m$ dar; dabei gehen die Gleichungen (1) über in:

(6)
$$\begin{cases} x'_\alpha = X_\alpha(x_1 \cdots x_n, z, \lambda_1 \cdots \lambda_m), \\ x'_\beta = \overline{X}_\beta(x_1 \cdots x_n, z, X_1 \cdots X_m), \\ z' = \overline{Z}(x_1 \cdots x_n, z, X_1 \cdots X_m) \\ (\alpha = 1 \cdots m, \beta = m+1 \ldots n). \end{cases}$$

Statt der Gleichungen (4a) erhalten wir:

$$\sum_1^m {}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_1^m {}^\alpha p'_\alpha \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} - \sum_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \sum_1^m {}^\alpha \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0$$

oder:

$$\sum_1^m {}^\alpha \left\{ \frac{\partial \overline{Z}}{\partial X_\alpha} - p'_\alpha - \sum_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial X_\alpha} \right\} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial \lambda_\varepsilon} = 0 \quad (\varepsilon = 1 \ldots m)$$

und da $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial \lambda_m} \neq 0$ ist, folgt daraus:

(7)
$$p'_\alpha = \frac{\partial \overline{Z}}{\partial X_\alpha} - \sum_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial X_\alpha} \quad (\alpha = 1 \ldots m).$$

Aus den Gleichungen (2a) aber wird:

$$\frac{d\overline{Z}}{dx_i} + \sum_1^m {}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} - \sum_1^m {}^\alpha p'_\alpha \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} - \sum_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \left\{ \frac{d\overline{X}_\beta}{dx_i} + \sum_1^m {}^\alpha \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} \right\} = 0,$$

mithin wegen (7):

(8)
$$\frac{d\overline{Z}}{dx_i} - \sum_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \frac{d\overline{X}_\beta}{dx_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots n).$$

Da die Gleichungen (7), $p_1' \cdots p'_m$ als Functionen von $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p'_{m+1} \ldots p'_n$ darstellen, ist die Beantwortung unserer Frage auf die Untersuchung zurückgeführt, ob die Gleichungen (8), $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p'_{m+1} \ldots p'_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, z, $p_1 \ldots p_n$ bestimmen oder was dasselbe ist, ob die Gleichungen:

$$-p_i = \frac{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_i} - \sum\limits_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial z} - \sum\limits_{m+1}^n {}^\beta p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial z}} = \frac{M_i}{M} \quad (i = 1 \ldots n)$$

nach $X_1 \ldots X_m$, $p'_{m+1} \ldots p'_n$ auflösbar sind; dabei kann offenbar keiner der Ausdrücke M, $M_1 \ldots M_n \equiv 0$ sein, sonst würden ja die p_i gar nicht in den Gleichungen (8) vorkommen. Die Gleichungen $M_i + p_i \,.\, M = 0$ sind nicht auflösbar, wenn:

$$\sum \pm \begin{vmatrix} M & M_1 \\ \frac{\partial M}{\partial \overline{X}_1} & \frac{\partial M_1}{\partial \overline{X}_1} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} M & M_m \\ \frac{\partial M}{\partial \overline{X}_m} & \frac{\partial M_m}{\partial \overline{X}_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M & M_{m+1} \\ \frac{\partial M}{\partial p'_{m+1}} & \frac{\partial M_{m+1}}{\partial p'_{m+1}} \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} M & M_n \\ \frac{\partial M}{\partial p'_n} & \frac{\partial M_n}{\partial p'_n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist oder da $M \not\equiv 0$ ist, wenn:

$$\Sigma \pm M \cdot \frac{\partial M_1}{\partial \overline{X}_1} \cdots \frac{\partial M_m}{\partial \overline{X}_m} \cdot \frac{\partial M_{m+1}}{\partial p'_{m+1}} \cdots \frac{\partial M_n}{\partial p'_n} \equiv 0.$$

Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \overline{X}_1} \cdots\cdots \frac{\partial M_n}{\partial \overline{X}_1} & \frac{\partial M}{\partial \overline{X}_1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial M_1}{\partial \overline{X}_m} \cdots\cdots \frac{\partial M_n}{\partial \overline{X}_m} & \frac{\partial M}{\partial \overline{X}_m} \\ \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial z} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x_n} & \frac{\partial \overline{Z}}{\partial z} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Setzt man:

$$\frac{\partial \overline{Z}}{\partial \overline{X}_\alpha} - \sum_{m+1}^{n} p'_\beta \cdot \frac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial \overline{X}_\alpha} = N_\alpha \; (\alpha = 1 \ldots m),$$

so wird:

$$\frac{\partial M}{\partial \overline{X}_\alpha} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial z}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial \overline{X}_\alpha} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial x_i}$$

und man erhält aus der letzten Gleichung:

$$\sum \pm \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial N_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \overline{X}_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial \overline{X}_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \overline{Z}}{\partial z} \equiv 0 \tag{9}$$

als Bedingung dafür, dass sich $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p_1' \ldots p_n'$ nicht als Functionen von (x, z, p) bestimmen.

Die Gleichung (9) sagt aus, dass sich $x_1 \ldots x_n$, z aus $N_1 \ldots N_m$, $\overline{X}_{m+1} \cdots \overline{X}_n$, $\overline{Z}$ eliminiren lassen, dabei bleibt es jedoch unentschieden, ob diese Elimination sich erst bei Hinzuziehung aller $n+1$ Functionen oder schon mit einer geringeren Zahl dieser Functionen ausführen lässt; da es aber kein Interesse hat, alle die speciellen Fälle, in denen (9) besteht, wirklich aufzusuchen, wollen wir uns damit begnügen einen sehr allgemeinen Fall anzugeben.

(9) besteht nämlich offenbar immer, wenn sich $N_1 \cdots N_m$, $\overline{X}_{m+1} \ldots \overline{X}_n$, $\overline{Z}$ als Functionen von $X_1 \ldots X_m$ und $\varrho < n+1$ Functionen

$\varphi_1 \ldots \varphi_\varrho$ von $x_1 \ldots x_n, z$ darstellen lassen, dies tritt aber ein, wenn die Gleichungen (1) bei der Elimination von $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ auf $n - m + 1$ Gleichungen von der Form:

$$F_\gamma(x_1' \ldots x_n', z', \varphi_1 \ldots \varphi_\varrho) = 0 \quad (\gamma = 1 \ldots n - m + 1)$$

führen.

Abgesehen von diesen Ausnahmefällen erhalten wir daher, indem wir aus den $n + m$ Gleichungen (2a) und (4a), $\lambda_1 \ldots \lambda_m, p_1' \ldots p_n'$ bestimmen und ihre Werthe in (1) einsetzen, zu unsern ∞^m Punkttransformationen (1) als vollständige Umhüllungstransformation die nachstehende Lie'sche Berührungstransformation:

$$(11) \qquad \begin{cases} x_i' = \Xi_i(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) \\ z' = Z(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ p_i' = \Pi_i(x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n) \\ \qquad (i = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Dabei ergeben die $n + 1$ ersten Gleichungen (11) bei der Elimination von $p_1 \ldots p_n$ gerade $n - m + 1$ Gleichungen zwischen (x, z, x', z').

Für $f = X_1 \ldots X_n, Z$ und entsprechend $\varphi = \Xi_1 \ldots \Xi_n, Z$ haben wir nun:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} + p \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^m {}_s \frac{\partial f}{\partial \lambda_s} \cdot \left\{ \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial z} \right\},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \sum_1^m {}_s \frac{\partial f}{\partial \lambda_s} \cdot \frac{\partial \lambda_s}{\partial p_i},$$

und hieraus finden wir bei Berücksichtigung der Gleichungen (2a) und (4a):

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial Z}{\partial z} - \displaystyle\sum_1^n {}_i \Pi_i \cdot \left\{ \dfrac{\partial \Xi_i}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial \Xi_i}{\partial z} \right\} \equiv 0, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial p_\varkappa} - \displaystyle\sum_1^n {}_i \Pi_i \cdot \dfrac{\partial \Xi_i}{\partial p_\varkappa} \equiv 0 \\ \qquad (\varkappa = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Das sind aber (cf. Ann. VIII p. 306) die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (11) eine Lie'sche Berührungstransformation bilden. Also:

Satz II. „∞_m *Punkttransformationen des Raumes* R_{n+1}, *die keine blossen Punktconstructionen sind, besitzen immer eine Lie'sche Berührungstransformation als vollständige Umhüllungstransformation, wenn* m *von den Functionen* $X_1 \ldots X_n$ *i. B. auf die* λ *unabhängig sind und die Gleichung* (9) *nicht identisch erfüllt wird.*“

Wir betrachten nunmehr die Gleichungen (11) und (12) als allgemeine Definitionsgleichungen der Lie'schen Berührungstransformationen im Raume von $n+1$ Dimensionen und verlangen nur, dass die Elimination der p_i gerade $n-m+1$ Gleichungen zwischen (x, z, x', z') ergiebt und dass keine der Functionen $\Xi_1 \ldots \Xi_n$, Z sich durch die übrigen allein ausdrücken lässt. Unter diesen Voraussetzungen können wir (11) auf die Form bringen:

$$\text{(11')} \quad \begin{cases} x_\alpha = \Xi_\alpha (x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n), \\ x'_\beta = \Xi'_\beta (x_1 \ldots x_n\ z, \Xi_1 \ldots \Xi_m), \\ z' = Z' (x_1 \ldots x_n, z, \Xi_1 \ldots \Xi_m) \\ (\alpha = 1 \ldots m, \quad \beta = m+1 \ldots n) \end{cases}$$

und es verschwinden dabei nicht alle Determinanten von der Form:

$$\sum \pm \frac{\partial \Xi_1}{\partial \pi_1} \cdots \frac{\partial \Xi_m}{\partial \pi_m},$$

wenn $\pi_1 \ldots \pi_m$ irgend m von den p_i bedeuten.

An Stelle der Gleichungen (12) erhalten wir, ähnlich wie die Gleichungen (7) und (8) aus (2a) und (4a) folgten:

$$\text{(12')} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z'}{\partial \Xi_\alpha} - \Pi_\alpha - \sum\limits_{m+1}^{n}{}^{\beta}\, \Pi_\beta \cdot \dfrac{\partial \Xi'_\beta}{\partial \Xi_\alpha} = 0, \\ \dfrac{\partial Z'}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial Z'}{\partial z} - \sum\limits_{m+1}^{n}{}^{\beta}\, \Pi_\beta \cdot \left\{ \dfrac{\partial \Xi'_\beta}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \dfrac{\partial \Xi'_\beta}{\partial z} \right\} = 0 \\ \qquad (\alpha = 1 \ldots m, \quad \varkappa = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Es ist nun sehr leicht (11') als eine vollständige Umhüllungstransformation darzustellen, man braucht nur:

$$\Xi_\alpha = \Phi_\alpha (x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m)$$

zu setzen ($\alpha = 1 \ldots m$), wo die Φ_α willkürlich wählbare Functionen bedeuten, deren Wahl nur dadurch beschränkt wird, dass sie nach $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ auflösbar und mit $\Xi'_{m+1} \ldots \Xi'_n$, Z' zusammengenommen i. B. auf $x_1 \ldots x_n$, z unabhängig sein müssen. Dann hat man die ∞^m Punkttransformationen:

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} x'_\alpha = \Phi_\alpha (x_1 \ldots x_n, z, \lambda_1 \ldots \lambda_m), \\ x'_\beta = \Xi'_\beta (x_1 \ldots x_n, z, \Phi_1 \ldots \Phi_m), \\ z' = Z' (x_1 \ldots x_n, z, \Phi_1 \ldots \Phi_m) \\ (\alpha = 1 \ldots m, \quad \beta = m+1 \ldots n) \end{cases}$$

und die Gleichungen zur Bestimmung der Umhüllungstransformation von (13) werden:

$$\frac{\partial Z'}{\partial \Phi_\alpha} - p'_\alpha - \sum_{m+1}^{n} {}^\beta p'_\beta \cdot \frac{\partial \Xi'_\beta}{\partial \Phi_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots m),$$

$$\frac{\partial Z'}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial Z'}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n} {}^\beta p'_\beta \cdot \left\{ \frac{\partial \Xi'_\beta}{\partial x_\varkappa} + p_\varkappa \cdot \frac{\partial \Xi'_\beta}{\partial z} \right\} = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots n).$$

Diese Gleichungen werden identisch erfüllt durch die Substitutionen: $\Phi_\alpha = \Xi_\alpha$, $p'_i = \Pi_i$, welche die Transformationen (13) wieder in die Lie'sche Berührungstransformation (11') verwandeln und $\lambda_1 \ldots \lambda_m$, $p'_1 \ldots p'_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, z, $p_1 \ldots p_n$ bestimmen; da ausserdem die Gleichungen (13) keine blosen Punktconstructionen darstellen, ist (11') offenbar vollständige Umhüllungstransformation von (13) und damit ist der Satz gewonnen:

Satz III. „*Jede Lie'sche Berührungstransformation der M_n des R_{n+1} lässt sich auf unbegränzt viele Weisen als vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen darstellen, wenn m eine von der Beschaffenheit der Berührungstransformation abhängige ganze Zahl $< n+1$ bedeutet; von den $n+1$ Gleichungen der ∞^m Punkttransformationen sind m fast unbeschränkt willkürlich wählbar.*“

Wir folgern hieraus wie in § 1., dass der Begriff „vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen“ sich mit dem in (11) und (12) definirten Begriffe der Lie'schen Berührungstransformation vollkommen deckt. Wollen wir daher den bekannten Satz, dass die Lie'schen Berührungstransformationen eindeutig umkehrbar sind, auch von unserer Ableitung dieser Transformationen ausgehend nachweisen, so brauchen wir blos zu zeigen, dass die vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen immer auflösbar und also eindeutig umkehrbar ist. Wir gehen dazu aus von der Form (6) der ∞^m Punkttransformationen und bemerken sofort, dass die Gleichungen (8) gestatten $p_1 \ldots p_n$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$, z, $X_1 \ldots X_m$, $p'_{m+1} \ldots p'_n$ darzustellen:

$$(14) \qquad p_i = - \frac{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x_i} - \sum_{m+1}^{n} {}^\beta p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial z} - \sum_{m+1}^{n} {}^\beta p'_\beta \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\beta}{\partial z}} \quad (i = 1 \ldots n).$$

Daraus geht hervor, dass die p_i sich auch als Functionen von:

$$x'_1 \ldots x'_n, z', p'_1 \ldots p'_n$$

ausdrücken lassen, sobald dies nur mit $x_1 \ldots x_n$, z, $X_1 \ldots X_m$ der Fall ist. Nun ist aber $X_\alpha = x_\alpha$ $(\alpha = 1 \ldots m)$, also brauchen wir blos zu beweisen, dass die Gleichungen $x'_\beta = \overline{X}_\beta$, $z' = \overline{Z}$ $(\beta = m+1 \ldots n)$ zusammen mit den Gleichungen (7) nach $x_1 \ldots x_n$, z auflösbar sind. Die

Gleichungen (7) können wir nach der bei (9) angewandten Bezeichnung schreiben: $p'_\alpha = N_\alpha (\alpha = 1 \ldots m)$ und wir sehen daraus, dass sich $x_1 \ldots x_n, z$ immer bestimmen, wofern nicht (9) besteht d. h. also immer, wenn (6) eine vollständige Umhüllungstransformation besitzt.

Auch die Werthe der p_i in (14) können durch die Substitutionen: $X_\alpha = x'_\alpha (\alpha = 1 \ldots m)$, $x_1 \ldots x_n$, z Functionen von (x', z', p') offenbar nicht auf Constanten sich reduciren oder unbestimmt werden, da sie an und für sich weder constant noch unbestimmt sind.

Wir sehen also, dass die vollständige Umhüllungstransformation von ∞^m Punkttransformationen immer eindeutig umkehrbar ist oder:

Satz IV. „*Jede Lie'sche Berührungstransformation der M_n des R_{n+1} ist nach $x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n$ auflösbar, also eindeutig umkehrbar.*“

Damit ist die Ableitung der Lie'schen Berührungstransformationen aus den Punkttransformationen auch im Raume R_{n+1} vollständig durchgeführt, höchstens bliebe noch zu untersuchen, ob auch wirklich die Auflösungen der Umhüllungstransformation von (1) und die Umhüllungstransformation der Auflösungen von (1) mit einander übereinstimmen, doch wollen wir nicht auf diese Frage eingehen, zumal da wir leicht einsehen können, dass dieselbe mit „ja“ zu beantworten ist.

Nämlich gewöhnlich lässt man die Lie'schen Berührungstransformationen aus $n - m + 1$ Gleichungen:

$$f_\varkappa (x_1' \ldots x_n', z', x_1 \ldots x_n, z) = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots n - m + 1)$$

entstehen und bestimmt $x_1' \ldots x_n', z', p_1' \ldots p_n'$ oder $x_1 \ldots x_n, z, p_1 \ldots p_n$ aus diesen und aus den Gleichungen:

$$\sum_1^{n-m+1} {}_\varkappa\, \varrho_\varkappa \cdot \left\{ f'_\varkappa(x'_i) + p'_i \cdot f_\varkappa(z') \right\} = 0,$$

$$\sum_1^{n-m+1} {}_\varkappa\, \varrho_\varkappa \cdot \left\{ f_\varkappa(x_i) + p_i \cdot f_\varkappa(z) \right\} = 0$$

$$(i = 1 \ldots n).$$

Dabei werden weder die (x, z) noch die (x', z') bevorzugt und es ist daher offenbar gleichgültig, ob man die Gleichungen $f_\varkappa = 0$ durch die ∞^m Punkttransformationen (1) oder durch deren Auflösungen ersetzt; beide Male erhält man ein und dieselbe Lie'sche Berührungstransformation als Umhüllungstransformation. Nur kurz sei noch bemerkt, dass man bei unserer Ableitung der Lie'schen Berührungstransformationen aus Punkttransformationen stets weniger Gleichungen aufzulösen hat, als nach der gewöhnlichen Methode.

Es ist mir zur Zeit noch nicht möglich, die eben durchgeführten Entwickelungen auch auf die Transformationen höherer Ordnung der M_n des R_{n+1} auszudehnen, ebensowenig kann ich auf verschiedene

interessante Fragen, welche bei den Transformationen höherer Ordnung der ebenen Curven auftreten, eingehen und muss daher diese Untersuchungen auf spätere Zeit verschieben. Der nachfolgende, letzte § giebt noch einen mit dem Vorhergehenden allerdings nicht in direktem Zusammenhang stehenden Beitrag zur Theorie der Berührungstransformationen überhaupt. Zwar hat man schon die Berührungstransformationen 1. O. der gewöhnlichen Raumcurven und überhaupt der Curven (M_1) des Raumes von n Dimensionen bestimmt, aber so allgemein wie in § 4 scheint die Bestimmung von Berührungstransformationen noch nicht ausgeführt worden zu sein.

§ 4.

Bestimmung aller Berührungstransformationen 1. O. der M_n des Raumes R_{n+m}.

Die Berührungstransformationen 1. O. der M_n des R_{n+m} müssen die Form haben:

$$(1)\qquad \begin{cases} x'_\alpha = X_\alpha(x_1 \, .. \, x_n, z_1 \, .. \, z_m, p_i^\varkappa), \\ z'_\varepsilon = Z_\varepsilon(x_1 \, .. \, x_n, z_1 \, .. \, z_m, p_i^\varkappa), \\ q_\alpha^\varepsilon = Q_\alpha^\varepsilon(x_1 \, .. \, x_n, z_1 \, .. \, z_m, p_i^\varkappa) \\ (\varepsilon, \varkappa = 1 \, .. \, m; \quad \alpha, i = 1 \, .. \, n), \end{cases}$$

wenn x, x' die unabhängigen, z, z' die abhängigen Variablen sind,

$$\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x_i} = p_i^\varkappa, \; \frac{\partial z'_\varkappa}{\partial x'_i} = q_i^\varkappa$$

gesetzt wird und endlich das $p_i^\varkappa$ in den Functionen X_α, Z_ε, Q_α^ε bedeutet, dass alle Differentialquotienten p_i^n darin vorkommen. Im Folgenden sind natürlich immer $z_1 \, .. \, z_m$ und $z_1' \, .. \, z'_m$ als Functionen von bezüglich $x_1 \, .. \, x_n$ und $x_1' \, .. \, x'_n$ zu betrachten.

Aus den Gleichungen:

$$dz'_\varepsilon - \sum_1^n {}^\alpha \, q_\alpha \cdot dx'_\alpha = 0$$

ergeben sich für die Functionen X_α, Z_ε, Q_α^ε sofort die Bedingungen:

$$\frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^n {}^\alpha \, Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{dX_\alpha}{dx_i} = 0,$$

welche wiederum, weil die Q_α^ε nur Differentialquotienten 1. O. der z_ε enthalten sollen, in die Gleichungen zerfallen:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_\varepsilon}{\partial p_i^\varkappa} - \displaystyle\sum_1^n{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa} = 0 & (\varepsilon, \varkappa = 1 \cdots m), \\ \dfrac{d' Z_\varepsilon}{d x_i} - \displaystyle\sum_1^n{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{d' X_\alpha}{d x_i} = 0 & (\alpha, i = 1 \cdots n), \end{cases}$$

wobei kurz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}^\lambda q_i^\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} = \frac{d' f}{d x_i}$$

gesetzt ist.

Die Gleichungen (2) zeigen zunächst, dass, wenn unter $\pi, \pi_1 \cdots \pi_n$, wie im Folgenden immer, irgend welche von den $p_i^\varkappa$ verstanden werden, alle Determinanten von der Form:

$$\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \pi_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \pi_n} = 0$$

sein müssen, dass also in den Z_ε die $p_i^\varkappa$ nur in den Verbindungen $X_1 \ldots X_n$ auftreten können:

$$Z_\varepsilon = \overline{Z}_\varepsilon (x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, X_1 \ldots X_n) \quad (\varepsilon = 1 \ldots m).$$

Deshalb ist:

$$\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial p_i^\varkappa} = \sum_1^n{}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa}, \quad \frac{d' Z_\varepsilon}{d x_i} = \frac{d \overline{Z}_\varepsilon}{d x_i} + \sum_1^n{}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{d' X_\alpha}{d x_i}$$

und an Stelle der Gleichungen (2) erhalten wir damit:

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n{}^\alpha \left(Q_\alpha^\varepsilon - \dfrac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \right) \cdot \dfrac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^\varkappa} = 0 & (\varepsilon, \varkappa = 1 \ldots m), \\ \dfrac{d' \overline{Z}_\varepsilon}{d x_i} - \displaystyle\sum_1^n{}^\alpha \left(Q_\alpha^\varepsilon - \dfrac{\partial \overline{Z}_\varepsilon}{\partial X_\alpha} \right) \cdot \dfrac{d' X_\alpha}{d x_i} = 0 & (\alpha, i = 1 \cdots n). \end{cases}$$

Wollen wir diese Gleichungen vereinfachen, so müssen wir über die Beschaffenheit der Determinanten $\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial \pi_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \pi_n}$ bestimmte Voraussetzungen machen: die allgemeinste Voraussetzung ist die, dass bei allen Determinanten der genannten Form die Unterdeterminanten n^{ten}, $n - 1^{\text{ten}} \ldots n - \mu + 1^{\text{ten}}$ Grades ausnahmslos $= 0$ sind, während die vom Grade $n - \mu$ nicht sämmtlich verschwinden; dabei wollen wir aber gleich von vornherein den Fall $\mu = n$ ausschliessen, denn für $\mu = n$ würden alle Functionen $X_1 \ldots X_n$ von den $p_i^\varkappa$ frei sein und wir hätten es mit blossen Punkttransformationen zu thun.

Bei den getroffenen Festsetzungen lassen sich μ und nicht mehr als μ von den X als Functionen der übrigen und der Variablen (x, z) darstellen, etwa:

$$X_\alpha = \overline{X}_\alpha(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m, X_{\mu+1} \dots X_n) \quad (\alpha = 1 \dots \mu)$$

und zwar verschwinden dann sicher nicht alle Determinanten:

$$\sum \pm \frac{\partial X_{\mu+1}}{\partial \pi_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \pi_n},$$

sonst wäre ja im Widerspruch mit dem eben gesagten auch noch $X_{\mu+1}$ eine Function von

$$x_1 \dots x_n, \; z_1 \dots z_m, \; X_{\mu+2} \dots X_n.$$

Weiter ist:

$$\overline{Z}_s = Z_s(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m, X_{\mu+1} \dots X_n)$$

und verstehen wir im Folgenden unter:

$$\frac{d}{dx_i} f(x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_m, X_{\mu+1} \dots X_n)$$

den Ausdruck:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}^s\, p_i^s \cdot \frac{\partial f}{\partial z_s},$$

so ist für $\alpha = 1 \cdots \mu$:

$$\frac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^x} = \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^x}, \qquad \frac{d' X_\alpha}{dx_i} = \frac{d \overline{X}_\alpha}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i}$$

und ausserdem:

$$\sum_1^n {}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}_s}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{\partial X_\alpha}{\partial p_i^x} = \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial Z_s}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^x},$$

$$\frac{d' \overline{Z}_s}{dx_i} + \sum_1^n {}^\alpha \frac{\partial \overline{Z}_s}{\partial X_\alpha} \cdot \frac{d' X_\alpha}{dx_i} = \frac{d Z_s}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial Z_s}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i}.$$

Durch Einführung dieser Relationen nehmen die Gleichungen (3) die Gestalt an:

$$\sum_1^\mu {}^\alpha Q_\alpha^s \cdot \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^x} + \sum_{\mu+1}^n {}^\beta Q_\beta^s \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^x} - \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial Z_s}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^x} = 0,$$

$$\frac{d Z_s}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial Z_s}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} - \sum_1^\mu {}^\alpha Q_\alpha^s \cdot \left\{ \frac{d \overline{X}_\alpha}{dx_i} + \sum_{\mu+1}^n {}^\beta \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} \right\} -$$

$$- \sum_{\mu+1}^n {}^\beta Q_\beta^s \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} = 0.$$

Dafür lässt sich übersichtlicher schreiben:

$$\sum_{\mu+1}^{n}{}^{\beta}\left\{Q_\beta^\varepsilon - \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta}\right\} \cdot \frac{\partial X_\beta}{\partial p_i^\varkappa} = 0,$$

$$\frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} - \sum_{\mu+1}^{n}{}^{\beta}\left\{Q_\beta^\varepsilon - \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta}\right\} \cdot \frac{d' X_\beta}{dx_i} = 0$$

$$(\varepsilon, \varkappa = 1 \ldots m, \; i = 1 \cdots n),$$

und erinnert man sich, dass nicht alle Determinanten:

$$\sum \pm \frac{\partial X_{\mu+1}}{\partial \pi_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial \pi_n}$$

identisch verschwinden, so kommt man sofort auf die Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} Q_\beta^\varepsilon - \dfrac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} = 0, \\[2ex] \dfrac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0 \\[2ex] (\varepsilon = 1 \ldots m, \; i = 1 \ldots n, \; \beta = \mu+1 \ldots n). \end{cases}$$

Aus alledem sehen wir, dass die gesuchten Berührungstransformationen nur die Form haben können:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_\alpha' = \overline{X}_\alpha(x_1 \ldots x_n, \; z_1 \ldots z_m, \; X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ x_\beta' = X_\beta(x_1 \ldots x_n, \; z_1 \ldots z_m, \; p_i^\varkappa), \\ z_\varepsilon' = Z_\varepsilon(x_1 \ldots x_n, \; z_1 \ldots z_m, \; X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ q_\alpha^\varepsilon = Q_\alpha^\varepsilon(x_1 \ldots x_n, \; z_1 \ldots z_m, \; p_i^\varkappa), \\[1ex] q_\beta^\varepsilon = \dfrac{\partial Z_\varepsilon}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \dfrac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \\[2ex] (\alpha = 1 \ldots \mu, \; \beta = \mu+1 \ldots n, \; \varepsilon = 1 \ldots m), \end{cases}$$

worin die $\overline{X}_\alpha$, X_β, Z_ε und Q_α^ε noch derart zu bestimmen sind, dass die Gleichungen:

$$(6) \qquad \frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^\mu{}^\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots n, \; \varepsilon = 1 \ldots m)$$

befriedigt werden. Dabei kann μ einen der Werthe $0, 1 \ldots n-1$ haben und zwar sind für $\mu = 0$ die $\sum_1^\mu{}^\alpha$ bei (5) und bei (6) durch Null zu ersetzen.

Bei Elimination der Q_α^ε aus den Gleichungen (6) erhalten wir $n-\mu$ Gleichungen für jedes Z_ε und haben deren allgemeinste Lösung aufzusuchen, worauf dann die Gleichungen (6) sich für jedes ε auf μ Gleichungen reduciren, welche die $Q_\alpha^\varepsilon (\alpha = 1 \ldots \mu)$ bestimmen.

Wir können ohne Weiteres $n+\mu+1$ Functionen $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, $X_{\mu+1} \ldots X_n$, Z_1, $Q_1^1 \ldots Q_\mu^1$ angeben, welche den Gleichungen (6) für $\varepsilon = 1$ genügen, wir brauchen nur $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, Z_1 als willkürliche Functionen ihrer Argumente (x, z, X_β) anzusehen, aus den Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$ die Q_α^1 zu eliminiren und nunmehr die X_β als Functionen von $(x, z, p_i^\varkappa)$ zu bestimmen, worauf sich aus (6) die Werthe der Q_α^1 ergeben. Bei besonderer Beschaffenheit der Functionen $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, Z_1 kann es vorkommen, dass die Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$ nicht alle Unbekannten Q_α^1, X_β bestimmen, es ist dann die Determinante:

$$\sum \pm \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} \cdot \frac{d}{dx_{\mu+1}} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial X_{\mu+1}} - \sum_1^\mu {}_\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_{\mu+1}} \right) \cdots$$

$$\cdots \frac{d}{dx_n} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial X_n} - \sum_1^\mu {}_\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_n} \right) \equiv 0,$$

oder also $\overline{X}_1 \cdots \overline{X}_\mu$, $\frac{\partial Z_1}{\partial X_{\mu+1}} \cdots \frac{\partial Z_1}{\partial X_n}$ sind Functionen von $f_1(x, z) \ldots f_\nu(x, z)$, $X_{\mu+1} \ldots X_n$ allein, wo $\nu < n$ ist und wir natürlich voraussetzen dürfen, dass nicht alle Determinanten $\sum \pm \frac{df_1}{d\xi_1} \cdots \frac{df_\nu}{d\xi_\nu} \equiv 0$ sind ($\xi_1 \ldots \xi_\nu$ irgend ν der Variablen $x_1 \ldots x_n$).

Für Z_1 selbst finden wir: $\chi(x, z) + F_1(f_1 \ldots f_\nu, X_{\mu+1} \ldots X_n)$ und erhalten aus den Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$:

$$\frac{d\chi}{dx_i} + \sum_1^\nu {}_\gamma \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu {}_\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} \right) \cdot \frac{df_\gamma}{dx_i} = 0 \quad (i = 1 \ldots n),$$

woraus folgt:

$$\sum \pm \frac{d\chi}{dx_\delta} \cdot \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_\nu}{dx_\nu} = 0 \quad (\delta = \nu + 1 \ldots n).$$

Hieraus schliessen wir, dass χ auch eine Function von $f_1 \ldots f_\nu$ ist, also mit F_1 verschmolzen oder $= 0$ gesetzt werden kann. Wegen der Eigenschaften der Determinanten $\sum \pm \frac{df_1}{d\xi_1} \cdots \frac{df_\nu}{d\xi_\nu}$ kommen wir daher auf die Gleichungen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu {}_\alpha Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1 \ldots \nu).$$

Wir bemerken zunächst, dass nur die Fälle $\nu \geqq \mu$ in Betracht kommen können, denn wäre $\nu < \mu$, so bestände zwischen den Functionen $\overline{X}_1 \dots \overline{X}_\mu$, $X_{\mu+1} \dots X_n$ allein wenigstens eine Relation, was damit unverträglich ist, dass $x_1' \dots x_n'$ die unabhängigen Variablen sind.

Aus den letzten Gleichungen lassen sich, da $\nu \geqq \mu$ ist, die Q_α^1 immer als Functionen von $f_1 \dots f_\nu$, $X_{\mu+1} \dots X_n$ darstellen und wir erhalten noch $\nu - \mu$ Gleichungen:

$$\text{(A)} \qquad \sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_\xi} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial f_\mu} = 0 \quad (\xi = \mu + 1 \dots \nu),$$

aus welchen sich noch etwa $X_{\mu+1} \dots X_\nu$ als Functionen von $f_1 \dots f_\nu$, $X_{\nu+1} \dots X_\nu$ bestimmen, während $X_{\nu+1} \dots X_n$ willkürliche Functionen ihrer Argumente (x, z, p_i^x) bleiben.

Aus (6) erhalten wir jetzt:

$$\frac{dZ_\varepsilon}{dx_i} - \sum_1^\nu{}_\gamma \frac{df_\gamma}{dx_i} \cdot \sum_1^\mu{}_\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} = 0 \quad (i = 1 \dots n,\ \varepsilon = 2 \dots m)$$

und somit:

$$\sum \pm \frac{dZ_\varepsilon}{dx_\delta} \cdot \frac{df_1}{dx_1} \cdots \frac{df_\nu}{dx_\nu} = 0 \quad (\delta = \nu + 1 \dots n,\ \varepsilon = 2 \dots m),$$

woraus folgt:

$$Z_\varepsilon = F_\varepsilon(f_1 \dots f_\nu,\ X_{\mu+1} \dots X_n).$$

Jetzt zeigt sich, dass ν jedenfalls $> \mu$ sein muss; denn wäre $\nu = \mu$, so liessen sich $Z_1 \dots Z_m$ alle als Functionen von $\overline{X}_1 \dots \overline{X}_\mu$ allein darstellen und von einer Transformation wäre gar nicht mehr die Rede.

Unsere letzten Gleichungen gehen nunmehr über in:

$$\sum_1^\nu{}_\gamma \frac{df_\gamma}{dx_i} \cdot \left(\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu{}_\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} \right) = 0 \quad (\varepsilon = 2 \dots m,\ i = 1 \dots n),$$

woraus:

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial f_\gamma} - \sum_1^\mu{}_\alpha Q_\alpha^\varepsilon \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial f_\gamma} = 0 \quad (\varepsilon = 2 \dots m,\ \gamma = 1 \dots \nu).$$

Diese Gleichungen bestimmen alle Q_α^ε und ergeben ausserdem für jedes F_ε die $\nu - \mu$ Bedingungen:

$$\sum \pm \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial f_\xi} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial f_\mu} = 0 \quad (\xi = \mu + 1 \dots \nu).$$

Wir wollen uns nicht dabei aufhalten, die allgemeinste Lösung dieser Gleichungen aufzusuchen und bemerken nur, dass dieselbe die Form hat:

$$F_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, X_{\mu+1} \ldots X_n),$$

so dass wir als allgemeine Lösung der Gleichungen (6) erhalten:

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} x'_\alpha = \overline{X}_\alpha(f_1 \ldots f_\nu, X_{\mu+1} \ldots X_n) & (\alpha = 1 \ldots \mu), \\ x'_\xi = X_\xi(f_1 \ldots f_\nu, X_{\nu+1} \ldots X_n) & (\xi = \mu+1 \ldots \nu), \\ x'_\delta = X_\delta(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, p_i^x) & (\delta = \nu+1 \ldots n), \\ z_1' = Z_1(f_1 \ldots f_\nu, X_{\mu+1} \ldots X_n), & \\ z_\varepsilon' = Z_\varepsilon(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, Z_1) & (\varepsilon = 2 \ldots m), \end{cases}$$

wo die $\overline{X}_\alpha$, X_δ, Z_1, Z_ε willkürliche Functionen ihrer Argumente sind, während die X_ξ sich aus (A) bestimmen.

Wir schreiten jetzt zur Betrachtung des allgemeinen Falles, dass die Gleichungen (6) ($\varepsilon = 1$) die Q_α^1 und X_β alle bestimmen und schreiben die Gleichungen, aus welchen sich die X_β direct ergeben, etwa folgendermassen:

$$(7) \qquad \sum \pm \frac{dZ_1}{dx_\beta} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0 \qquad (\beta = \mu + 1 \ldots n).$$

Es leuchtet ein, dass unter diesen Voraussetzungen aus den Gleichungen: $X_{\mu+1} = c_{\mu+1} \ldots X_n = c_n$ sich $n - \mu$ p_i^x mit lauter verschiedenen Indices i bestimmen lassen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, gehörten $i = 1 \ldots \mu + 1$ nicht zu den Indices i der $n - \mu$ bestimmten p_i^x, so müsste die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{dZ_1}{dx_{\mu+1}} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0$$

an und für sich identisch bestehen, denn dieselbe wird zur Identität für die gefundenen Werthe von $X_{\mu+1} \ldots X_n$, sie muss also identisch bleiben, wenn man für jene $n - \mu$ p_i^x ihre Werthe setzt, wobei sich die Functionen X_β bezüglich auf c_β reduciren, während ausserhalb der X_β jene p_i^x gar nicht in der Gleichung vorkommen.

Die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{dZ_1}{dx_{\mu+1}} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0$$

kann aber gar nicht an und für sich identisch bestehen, wenn wirklich die Gleichungen (6) ($\varepsilon = 1$) alle Unbekannten Q_α^1, X_β bestimmen. Deshalb können wir also annehmen, aus den Gleichungen $X_\beta = c_\beta$ ($\beta = \mu + 1 \ldots n$) ergebe sich $p_\beta^m = \varphi_\beta^m(\beta = \mu + 1 \ldots n)$, die Indices x sind dabei der Einfachheit halber alle $= m$ gewählt; sollten sie nicht alle $= m$ sein, so ändert das an den folgenden Betrachtungen wenig, am Resultate gar nichts. Unsere Aufgabe ist jetzt die Z_ε als von den p_i^x freie Functionen von (x, z, c) derart zu bestimmen, dass sie die Gleichungen:

$$\sum \pm \left\{ \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} + \sum_1^{m-1} {}^\lambda p_\beta^\lambda \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} + \varphi_\beta^m \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \right\} \cdot \frac{d\overline{X}_1}{dx_1} \cdots \frac{d\overline{X}_\mu}{dx_\mu} = 0$$

$$(\beta = \mu + 1 \ldots n)$$

befriedigen, Gleichungen, welche für $\varepsilon = 1$ schon identisch bestehen.

Wir schreiben diese Gleichungen folgendermassen:

$$(7') \left\{ \begin{array}{l} \sum \pm \left[\frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} + \sum_1^{m-1} {}^\lambda p_\beta^\lambda \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} \right] \cdot \left[\frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} + \sum_1^m {}^\lambda p_1^\lambda \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial z_\lambda} \right] \cdots \\ \qquad \cdots \left[\frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu} + \sum_1^m {}^\lambda p_\mu^\lambda \cdot \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial z_\lambda} \right] + \\ + \varphi_\beta^m \cdot \sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \left[\frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} + \sum_1^m {}^\lambda p_1^\lambda \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial z_\lambda} \right] \cdots \\ \qquad \cdots \left[\frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu} + \sum_1^m {}^\lambda p_\mu^\lambda \cdot \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial z_\lambda} \right] = 0 \end{array} \right.$$

$$(\beta = \mu + 1 \ldots n);$$

setzen wir alle hierin vorkommenden $p_i^\varkappa = 0$, so kommt:

$$\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu} + (\varphi_\beta^m)^0 \cdot \sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Differentiiren wir (7) nach p_β^λ $(\lambda = 1 \ldots m-1)$ und setzen dann alle $p_i^\varkappa = 0$, so folgt:

$$\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu} + \left(\frac{\partial \varphi_\beta^m}{\partial p_\beta^\lambda} \right)^0 \cdot \sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Alle diese Gleichungen bestehen für $\varepsilon = 1$ schon identisch, wir erhalten daher für Z_ε folgende Gleichungen:

$$\frac{\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu}}{\sum \pm \frac{\partial Z_1}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu}} = \frac{\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu}}{\sum \pm \frac{\partial Z_1}{\partial z_\lambda} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu}} =$$

$$= \frac{\sum \pm \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu}}{\sum \pm \frac{\partial Z_1}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \overline{X}_\mu}{\partial x_\mu}}$$

$$(\beta = \mu + 1 \ldots n, \ \lambda = 1 \ldots m):$$

Das sind $m+n-\mu-1$ lineare, von einander unabhängige Differentialgleichungen für Z_ε, welche befriedigt sein müssen, wenn (7') bestehen soll. Die Zahl der unabhängigen Variablen (x, z) ist $m+n$, also besitzen diese Gleichungen nicht mehr als $\mu+1$ unabhängige Lösungen, die wir wirklich angeben können: $Z_\varepsilon = Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$. Die allgemeine Lösung ist daher:

$$Z_\varepsilon = F(Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, c_{\mu+1} \ldots c_n),$$

eine Lösung, welche offenbar auch die Gleichungen (7) erfüllt. Wir ersehen daraus, dass die allgemeinste Lösung der Gleichungen (6) die Form hat:

$$Z_\varepsilon = Z'_\varepsilon(Z_1, \overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu, X_{\mu+1} \ldots X_n).$$

Die Gleichungen (6) gehen dabei über in:

$$(8) \qquad \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} - \sum_1^\mu{}_\alpha \left\{ Q^\varepsilon_\alpha - \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} \right\} \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0 \quad (\varepsilon = 2 \ldots m),$$

und vergleicht man damit

$$\frac{dZ_1}{dx_i} - \sum_1^\mu{}_\alpha Q^1_\alpha \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0,$$

so folgt:

$$Q^\varepsilon_\alpha \equiv \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} + Q^1_\alpha \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \quad (\varepsilon = 2 \ldots m, \ \alpha = 1 \ldots \mu).$$

Ausserdem wird aus (5):

$$q^1_\beta = \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}_\alpha Q^1_\alpha \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \quad (\beta = \mu+1 \ldots n),$$

$$(8') \qquad q^\varepsilon_\beta = \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu{}_\alpha \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}_\alpha Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta},$$

$$q^\varepsilon_\beta = \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} + \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu{}_\alpha Q^1_\alpha \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1},$$

$$q^\varepsilon_\beta = \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} + Q^1_\beta \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1}.$$

$$(\varepsilon = 2 \ldots m),$$

Fassen wir mit dem eben Gefundenen das Resultat der Untersuchung des speciellen Falles, in welchem die Gleichungen (6) $(\varepsilon = 1)$ nicht alle Unbekannten Q^1_α, X_β bestimmen, soweit als möglich zusammen, so finden wir, dass die allgemeinste Form der Berührungstransformationen der M_n des R_{n+m} die folgende ist:

$$(9)\quad\begin{cases} x'_\alpha = \overline{X}_\alpha(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ x'_\beta = X_\beta(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ p_i^{\varkappa}), \\ z'_1 = Z_1(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ X_{\mu+1} \ldots X_n), \\ z'_\varepsilon = Z'_\varepsilon(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu,\ X_{\mu+1} \ldots X_n,\ Z_1) \\ (\alpha = 1 \ldots \mu,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m). \end{cases}$$

Hierbei ist μ irgend eine der Zahlen $0, 1 \ldots n-1$; $\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_\mu$, $Z_1, Z_2' \ldots Z_m'$ sind willkürliche Functionen ihrer Argumente und $X_{\mu+1} \ldots X_n$, sowie auch $Q_1^1 \ldots Q_\mu^1$ bestimmen sich aus den Gleichungen (6) und (7) ($\varepsilon = 1$).

Ausserdem wird noch:

$$(10)\quad\begin{cases} \left.\begin{aligned} q_\alpha^1 &= Q_\alpha^1(x_1 \ldots x_n,\ z_1 \ldots z_m,\ p_i^{\varkappa}) \\ q_\alpha^\varepsilon &= \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} + Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \\ q_\beta^1 &= \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} - \sum_1^\mu {}^\alpha\, Q_\alpha^1 \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \\ q_\beta^\varepsilon &= \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta} + Q_\beta^1 \cdot \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \end{aligned}\right\}\ \frac{dZ_1}{dx_i} - \sum_1^\mu {}^\alpha\, Q_\alpha^1 \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} = 0. \\ (\alpha = 1 \ldots \mu,\ \beta = \mu+1 \ldots n,\ \varepsilon = 2 \ldots m,\ i = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Die Transformation (9) ergiebt die $m-1$ von den (x, z) freien Gleichungen: $z'_\varepsilon = Z'_\varepsilon(x_1' \ldots x_n',\ z_1')$ ($\varepsilon = 2 \ldots m$) und diese Gleichungen stellen offenbar eine M'_{n+1} des R'_{n+m} dar. Wir sehen daher, dass alle Berührungstransformationen der M_n des R_{n+m} alle M_n des R_{n+m} in solche M'_n des R'_{n+m} verwandeln, die auf ein und derselben M'_{n+1} liegen, d. h. es giebt ausser den gewöhnlichen Punkttransformationen keine eindeutig umkehrbaren Berührungstransformationen, welche alle M_n des R_{n+m} in alle M'_n des R'_{n+m} und umgekehrt überführten. Will man eine eindeutig umkehrbare Transformation haben, so muss man zwischen den Variablen (x, z) allein noch $m-1$ Gleichungen festsetzen, d. h. es giebt nur solche eindeutig umkehrbare Berührungstransformationen der M_n des R_{n+m}, welche die M_n einer M_{n+1} des R_{n+m} in die M'_n einer M'_{n+1} des R'_{n+m} verwandeln, oder eindeutigumkehrbare Berührungstransformationen von M_n sind ausser den Punkttransformationen nur die Lie'schen Berührungstransformationen der M_n eines Raumes von $n+1$ Dimensionen.

Es ist nicht schwer die Gleichungen zur Bestimmung der Berührungstransformationen auf eine elegantere Form zu bringen. Diejenigen unter den Gleichungen (9) nämlich, welche von den $p_i^{\varkappa}$ frei sind,

lassen sich offenbar ersetzen durch ein System Gleichungen von der Form:

$$(11)\quad \begin{cases} F_\gamma(x_1' \dots x_n',\, z_1' \dots z_m') = 0, \\ \Psi_\delta\,(x_1' \dots x_n',\, z_1' \dots z_m',\, x_1 \dots x_n,\, z_1 \dots z_m) = 0, \\ (\gamma = 1 \dots m-1,\ \delta = 1 \dots \mu+1), \end{cases}$$

woraus die betreffenden Gleichungen (9) sich durch Auflösung nach:

$$z_2' \dots z_m' \quad \text{und} \quad x_1' \dots x_\mu',\, z_1'$$

ergeben.

Die Gleichungen (10) bestimmen nun noch $x_{\mu+1}' \dots x_n'$ und die $q_i^\varkappa$; wollen wir daher die Transformationen (9) aus Gleichungen von der Form (11) ableiten, so ist es nur nöthig die Gleichungen (10) so umzuformen, dass die Functionen X, Z nicht mehr darin vorkommen, dass vielmehr bloss F und Ψ noch auftreten. Eine Anzahl Gleichungen für die $q_i^\varkappa$ ergiebt sich sofort aus (11), nämlich:

$$\frac{dF_\gamma}{dx_i'} = 0 \quad (\gamma = 1 \dots m-1,\ i = 1 \dots n).$$

Weiter liefert das Verhältniss der Gleichungen (9) und (11) zu einander folgende Identitäten:

$$\Psi_\delta(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_\mu,\, X_{\mu+1} \dots X_n,\, Z_1,\, Z_2' \dots Z_m',\, x_1 \dots x_n,\, z_1 \dots z_m) \equiv 0$$
$$(\delta = 1 \dots \mu+1),$$

welche für jeden Werth von:

$$X_{\mu+1} \dots X_n,\ x_1 \dots x_n,\ z_1 \dots z_m$$

stattfinden.

Diese Gleichungen ergeben nach x_i und X_β differentiirt, wobei natürlich $z_1 \dots z_m$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$ zu betrachten sind:

$$\frac{d\Psi_\delta}{dx_i} + \sum_1^\mu {}^\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_2^m {}^\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial \overline{X}_\alpha} \right\} \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} + \sum_2^m {}^\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial Z_1} \right\} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_2^m {}^\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial X_\beta} + \sum_1^\mu {}^\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_2^m {}^\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial \overline{X}_\alpha} \right\} \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} +$$
$$+ \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} + \sum_2^m {}^\varepsilon \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_\varepsilon'} \cdot \frac{\partial Z_\varepsilon'}{\partial Z_1} \right\} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv 0$$

$$(\delta = 1 \dots \mu+1,\ \beta = \mu+1 \dots n,\ i = 1 \dots n).$$

Beachtet man nun, dass aus den Gleichungen (8) und (8′) folgt:

$$\sum_1^\mu {}_\alpha \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} + \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} \equiv \sum_1^\mu {}_\alpha Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i},$$

$$\sum_1^\mu {}_\alpha \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial \overline{X}_\alpha} \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial Z_\varepsilon}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv Q^\varepsilon_\beta + \sum_1^\mu {}_\alpha Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} - \frac{\partial Z'_\varepsilon}{\partial X_\beta}$$

$$(i = 1 \ldots n, \ \varepsilon = 2 \ldots m, \ \beta = \mu + 1 \ldots n),$$

so erhält man statt der letzten Gleichungen die folgenden:

$$\frac{d\Psi_\delta}{dx_i} + \sum_1^\mu {}_\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_2^m {}_\varepsilon Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i} + \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} \cdot \frac{dZ_1}{dx_i} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_2^m {}_\varepsilon Q^\varepsilon_\beta \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} + \sum_1^\mu {}_\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_2^m {}_\varepsilon Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} + $$
$$+ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv 0.$$

Verbindet man damit die Relationen (cf. (10)):

$$\frac{dZ_1}{dx_i} \equiv \sum_1^\mu {}_\alpha Q^1_\alpha \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i},$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial X_\beta} \equiv Q^1_\beta + \sum_1^\mu {}_\alpha Q^1_\alpha \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta},$$

so bekommt man:

$$\frac{d\Psi_\delta}{dx_i} + \sum_1^\mu {}_\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_1^m {}_\varepsilon Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{d\overline{X}_\alpha}{dX_i} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_1^m {}_\varepsilon Q^\varepsilon_\beta \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} + \sum_1^\mu {}_\alpha \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_1^m {}_\varepsilon Q^\varepsilon_\alpha \cdot \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \right\} \cdot \frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta} \equiv 0,$$

wo $Z_1' = Z_1$ ist.

$$(\delta = 1 \ldots \mu + 1, \ \beta = \mu + 1 \ldots n, \ i = 1 \ldots n).$$

Um hieraus noch die Differentialquotienten der $\overline{X}_\alpha$ wegzuschaffen, brauchen wir blos die letzten Gleichungen bezüglich mit Factoren ϱ_δ zu multipliciren, nach δ von 1 bis $\mu + 1$ zu summiren und dann

die ϱ_δ so zu bestimmen, dass die μ verschiedenen Factoren der $\frac{d\overline{X}_\alpha}{dx_i}$ und der $\frac{\partial \overline{X}_\alpha}{\partial X_\beta}$ verschwinden. So kommen wir auf die Gleichungen:

$$\sum_1^{\mu+1}{}^{\delta} \varrho_\delta \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \overline{X}_\alpha} + \sum_1^{m}{}^{\varepsilon} \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \cdot Q_\alpha^\varepsilon \right\} = 0,$$

$$\sum_1^{\mu+1}{}^{\delta} \varrho_\delta \cdot \left\{ \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial X_\beta} + \sum_1^{m}{}^{\varepsilon} \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial Z'_\varepsilon} \cdot Q_\beta^\varepsilon \right\} = 0,$$

$$\sum_1^{\mu+1}{}^{\delta} \varrho_\delta \cdot \frac{d\Psi_\delta}{dx_i} = 0$$

$$(\alpha = 1 \ldots \mu, \ \beta = \mu + 1 \ldots n, \ i = 1 \ldots n).$$

Nehmen wir hierzu noch die Gleichungen $\frac{dF_\gamma}{dx'_i} = 0$ und ersetzen ausserdem $\overline{X}_\alpha$, X_β, Q_α^ε, Q_β^ε durch x'_α, x'_β, q_α^ε, q_β^ε, so haben wir im Ganzen die Gleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dF_\gamma}{dx_i} = 0, \\ \sum\limits_1^{\mu+1}{}^{\delta} \varrho_\delta \cdot \dfrac{d\Psi_\delta}{dx'_i} = 0, \\ \sum\limits_1^{\mu+1}{}^{\delta} \varrho_\delta \cdot \dfrac{d\Psi_\delta}{dx_i} = 0 \\ (\gamma = 1 \ldots m-1, \ i = 1 \ldots n). \end{cases}$$

Die Gleichungen (11) und (12) zusammengenommen sind an der Zahl:

$$m - 1 + \mu + 1 + n \,.\, (m - 1 + 1 + 1) = m + n + \mu + m \,.\, n;$$

die Unbekannten sind x', z', $q_i^\varkappa$, ϱ_δ, ihre Anzahl beträgt, da die ϱ_δ nur für μ Unbekannte zu rechnen sind: $m + n + \mu + m \,.\, n$. Wir haben also ebensoviel Gleichungen als Unbekannte und es ist somit unsere Absicht, die Berührungstransformationen aus Gleichungen von der Form (11) abzuleiten, erreicht.

Wollen wir eindeutig umkehrbare Transformationen haben, so müssen wir noch $m - 1$ Gleichungen zwischen den (x, z) allein hinzufügen, wir können daher sagen:

Satz. „*Jede eindeutig umkehrbare Berührungstransformation der M_n des R_{n+m} wird erhalten durch Auflösung der Gleichungen:*

$$
(13)\quad \begin{cases}
F_\gamma(x_1'\ldots x_n',\ z_1'\ldots z_m') = 0, \quad \Phi_\gamma(x_1\ldots x_n,\ z_1\ldots z_m) = 0,\\
\Psi_\delta(x_1'\ldots x_n',\ z_1'\ldots z_m',\ x_1\ldots x_n,\ z_1\ldots z_m) = 0,\\
\dfrac{dF_\gamma}{dx_i'} = 0, \qquad \dfrac{d\Phi_\gamma}{dx_i} = 0,\\
\sum_1^{\mu+1}{}_\delta\, \varrho_\delta \cdot \dfrac{d\Psi_\delta}{dx_i'} = 0, \qquad \sum_1^{\mu+1}{}_\delta\, \varrho_\delta \cdot \dfrac{d\Psi_\delta}{dx_i} = 0\\
(\gamma = 1\ldots m-1,\ \delta = 1\ldots\mu+1,\ i = 1\ldots n)
\end{cases}
$$

nach (x', z', q_i^x) *oder nach* (x, z, p_i^x).“

Lebenslauf.

Geboren am 26. December 1861 in Lugau bei Chemnitz als Sohn des dortigen Pfarrers Engel wurde ich auf den Namen Friedrich getauft. Im Jahre 1865 siedelten wir nach Greiz über, wo ich seit Ostern 1868 zunächst einige Jahre lang die Bürgerschule besuchte, bis ich Michaelis 1872 in die Quarta des neugegründeten Gymnasiums aufgenommen wurde; später wurde mein Vater an demselben Gymnasium als Religionslehrer angestellt. Ostern 1879 bestand ich das Maturitätsexamen und bezog als Student der Mathematik die Universität Leipzig, woselbst ich während der drei ersten Semester die Vorlesungen der Herren Professoren Bruhns, Drobisch, Hankel, Heinze, A. Mayer, v. Noorden besuchte. Die nächsten beiden Semester brachte ich in Berlin zu, wo ich bei den Herren Professoren v. Helmholtz, G. Kirchhoff, Kummer, Lotze, Wangerin, Weierstrass, Zeller Collegien hörte; Michaelis 1881 nach Leipzig zurückgekehrt hörte ich zunächst noch zwei Semester hindurch bei den Herren Professoren F. Klein, Masius, v. der Mühll, Scheibner, Wundt und nahm an den Uebungen bezüglich Seminaren der Herren Docenten Hankel, A. Mayer, v. der Mühll theil. Das letzte halbe Jahr meines Studiums wurde von dem Staatsexamen ausgefüllt, welches mit der im Januar 1883 bestandenen mündlichen Prüfung seinen Abschluss fand. Seit dem 1. April 1883 genüge ich in Dresden beim Schützenregiment meiner Militärpflicht als Einjährig Freiwilliger. —

Allen den oben genannten hochverehrten Lehrern sage ich für die vielfältige Anregung und Förderung, welche mir von ihnen geworden ist, meinen aufrichtigsten Dank, insbesondere noch Herrn Professor Dr. A. Mayer für die grosse Güte und Freundlichkeit, welche er mir jederzeit bewiesen hat; auch will ich die Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, der mathematisch-physikalischen Classe der hohen Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, hier öffentlich für die Verleihung des Härtelschen Stipendiums meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Friedrich Engel,
cand. math.



DUE MAY 5 '43
DUE NOV 15 48



Math 4508.83
Zur theorie der ber
Cabot Science
3 2044 09